Le polynôme du second degré

1. Forme canonique : Le polynôme de degré 2 est aussi appelé trinôme du second degré, et on le note $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On peut le factoriser : $ax^2 + bx + c = a[\, x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \,] = a[\, (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \,] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\,]$.

On note $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé le **discriminant** du polynôme. On a alors $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ appelée **forme canonique** du trinôme. On peut alors résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

2. Résolution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$:

Trois cas se présentent :

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; alors $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} > 0$ et l'équation n'a pas de solution.

b) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; alors l'équation devient $a\,(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ et la solution est $x = \frac{-b}{2a}$ (appelée solution double).

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; alors $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ se factorise (en utilisant: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$) :

$(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$ et on obtient les solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans ce cas , on a la factorisation : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemples : Résoudre les équations : $3x^2 - 2x - 1 = 0$; $2x^2 + 3x - 1 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $3x^2 + 5x + 3 = 0$.

2. Etude des variations :

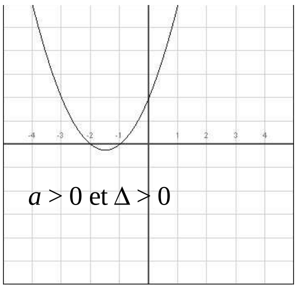
Le polynôme est dérivable sur ℝ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2ax + b$; le signe de cette dérivée dépend du signe de a , d'où les tableaux de variations :

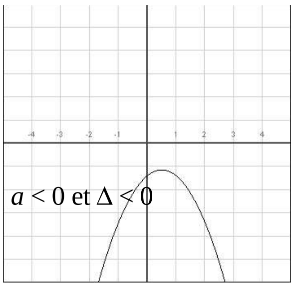
Si $a > 0$:					
x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$2ax + b$		$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

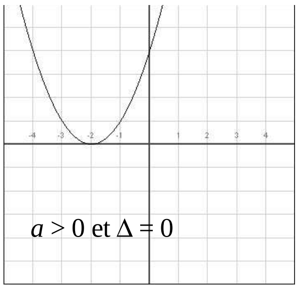
Si $a < 0$:					
x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$2ax + b$		$+$	0	$-$	
$ax^2 + bx + c$	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

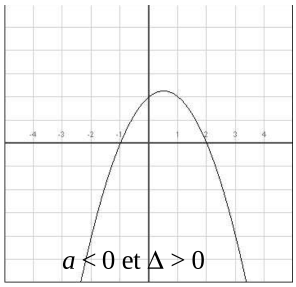
2. Représentation graphique :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. La représentation graphique de f est une parabole de sommet $S\left(\frac{-b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Cette parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$. *Quelques exemples* :









3. Le signe de $ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x :

Si $\Delta < 0$			**Si $\Delta = 0$**			**Si $\Delta > 0$** (on suppose $x_1 < x_2$)				
x	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-b/(2a)$	$+\infty$	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a		signe de a	0	signe de a	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Exemples : résoudre les inéquations : $3x^2 - 2x - 1 < 0$; $2x^2 + 3x - 1 > 0$; $x^2 - 6x + 9 \leq 0$; $3x^2 + 5x + 3 > 0$.