CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 PREMIÈRE (A)

EXERCICE 1 : On considère le polynôme P défini par $P(x) = -x^2 + 2x + 3$ et le polynôme Q dont la représentation graphique a pour sommet S(2 ; – 2) et passant par A(0 ; 2).

1. La forme canonique de $Q(x)$ est $a(x-2)^2 - 2$; A(0 ; 2) est sur la parabole, donc Q(0) = 2,
soit $a(0-2)^2 - 2 = 2$, soit $4a - 2 = 2$, soit $4a = 4$, soit $a = 1$.
Donc $Q(x) = (x-2)^2 - 2 = (x^2 - 4x + 4) - 2 = x^2 - 4x + 2$ qui est la forme développée.

2. Les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de P sont $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2\times(-1)} = 1$ et
$\beta = P(1) = -1^2 + 2\times1 + 3 = 4$. Donc S(1 ; 4).

3. Le tableau de variations de $P(x)$:
Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)$		↗	4	↘	

et celui de $Q(x)$:
Comme $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$Q(x)$		↘	– 2	↗	

4. L'équation $P(x) = 0$ équivaut à $-x^2 + 2x + 3 = 0$; on calcule le discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times3 = 16 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2+4}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2-4}{-2} = 3$.
Donc S = {– 1 ; 3}.
L'équation $Q(x) = 0$ équivaut à $x^2 - 4x + 2 = 0$; on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times2 = 8 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$ et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$.

Donc S = $\{2 + \sqrt{2} ; 2 - \sqrt{2}\}$.

5. Tableau de signes de $P(x)$: $(a = -1 < 0)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

et de $Q(x)$: $(a = 1 > 0)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6. Pour déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection des paraboles représentant P et Q, on résout l'équation $P(x) = Q(x)$ équivaut à $-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 4x + 2$ équivaut à $2x^2 - 6x - 1 = 0$;
on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times2\times(-1) = 44 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+\sqrt{44}}{2\times2} = \dfrac{6+2\sqrt{11}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-\sqrt{44}}{2\times2} = \dfrac{6-2\sqrt{11}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.
Il y a deux points d'intersection d'abscisses $\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

7. L'inéquation $P(x) \geqslant Q(x)$ équivaut à $2x^2 - 6x - 1 \leq 0$; d'après la question précédente, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$		$\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 6x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où la solution :
S = $\left[\dfrac{3-\sqrt{11}}{2} ; \dfrac{3+\sqrt{11}}{2}\right]$.

EXERCICE 2 :
Trouver les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 16 cm et l'aire est égale à 13 cm^2 .

Soient x et y les dimensions du rectangle ; alors le périmètre $= 2x + 2y = 16$ cm et l'aire $= xy = 13$ cm^2 .
D'où $x + y = 8$, soit $y = 8 - x$; on remplace dans l'autre équation : $x(8 - x) = 13$ équivaut à
$-x^2 + 8x - 13 = 0$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\times(-1)\times(-13) = 12 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \dfrac{-8+2\sqrt{3}}{-2} = 4 - \sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{12}}{2\times(-1)} = 4 + \sqrt{3}$.

D'où $y_1 = 8 - (4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$ et $y_2 = 8 - (4 + \sqrt{3}) = 4 - \sqrt{3}$.
Donc les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 16 cm et l'aire est égale à 13 cm^2
sont $4 + \sqrt{3}$ et $4 - \sqrt{3}$ cm.

Vérification : périmètre $= 2(4 + \sqrt{3}) + 2(4 - \sqrt{3}) = 8 + 8 = 16$ et
aire $= (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13$.

CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 PREMIÈRE (B)

EXERCICE 1 : On considère le polynôme P défini par $P(x) = -x^2 - 2x + 2$ et le polynôme Q dont la représentation graphique a pour sommet $S(-2\ ;\ -1)$ et passant par $A(0\ ;\ 3)$.

1. La forme canonique de $Q(x)$ est $a(x+2)^2 - 1$; $A(0\ ;\ 3)$ est sur la parabole, donc $Q(0) = 3$, soit $a(0+2)^2 - 1 = 3$, soit $4a - 1 = 3$, soit $4a = 4$, soit $a = 1$.
Donc $Q(x) = (x+2)^2 - 1 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = x^2 + 4x + 3$ qui est la forme développée.

2. Les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de P sont $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2\times(-1)} = -1$ et
$\beta = P(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1) + 2 = 3$. Donc $S(-1\ ;\ 3)$.

3. Le tableau de variations de $P(x)$:
Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$P(x)$		↗	3	↘	

et celui de $Q(x)$:
Comme $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$Q(x)$		↘	-1	↗	

4. L'équation $P(x) = 0$ équivaut à $-x^2 - 2x + 2 = 0$; on calcule le discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 2 = 12 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{-2} = -1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{-2} = -1 + \sqrt{3}$.
Donc $S = \{-1 - \sqrt{3}\ ;\ -1 + \sqrt{3}\}$.
L'équation $Q(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 4x + 3 = 0$; on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times 1\times 3 = 4 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2} = -3$.
Donc $S = \{-1\ ;\ -3\}$.

5. Tableau de signes de $P(x)$: $(a = -1 < 0)$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$-1-\sqrt{3}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

et de $Q(x)$: $(a = 1 > 0)$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6. Pour déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection des paraboles représentant P et Q, on résout l'équation $P(x) = Q(x)$ équivaut à $-x^2 - 2x + 2 = x^2 + 4x + 3$ équivaut à $2x^2 + 6x + 1 = 0$;
on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\times 2\times 1 = 28 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+\sqrt{28}}{2\times 2} = \dfrac{-6+2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-\sqrt{28}}{2\times 2} = \dfrac{-6-2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$.
Il y a deux points d'intersection d'abscisses $\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$.

7. L'inéquation $P(x) \geqslant Q(x)$ équivaut à $2x^2 + 6x + 1 \leq 0$; d'après la question précédente, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$		$\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 6x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où la solution :
$S = \left[\ \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}\ ;\ \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}\ \right]$.

EXERCICE 2 :
Trouver les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 16 cm et l'aire est égale à 10 cm^2 .

Soient x et y les dimensions du rectangle ; alors le périmètre $= 2x + 2y = 16$ cm et l'aire $= xy = 10$ cm^2 .
D'où $x + y = 8$, soit $y = 8 - x$; on remplace dans l'autre équation : $x(8 - x) = 10$ équivaut à
$-x^2 + 8x - 10 = 0$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\times(-1)\times(-10) = 24 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{24}}{2\times(-1)} = \dfrac{-8+2\sqrt{6}}{-2} = 4 - \sqrt{6}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{24}}{2\times(-1)} = 4 + \sqrt{6}$.

D'où $y_1 = 8 - (4 - \sqrt{6}) = 4 + \sqrt{6}$ et $y_2 = 8 - (4 + \sqrt{6}) = 4 - \sqrt{6}$.
Donc les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 16 cm et l'aire est égale à 10 cm^2
sont $4 + \sqrt{6}$ et $4 - \sqrt{6}$ cm.

Vérification : périmètre $= 2(4 + \sqrt{6}) + 2(4 - \sqrt{6}) = 8 + 8 = 16$ et
aire $= (4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6}) = 16 - 6 = 10$.