

EXERCICE 1 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 4$;
et $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 4v_n$.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 1$;

la suite (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = 2$.

2. La suite (u_n) est arithmétique de raison strictement négative, donc elle est strictement décroissante.

La suite (v_n) est géométrique de raison $4 > 1$ et de premier terme $v_0 = 2 > 0$, donc elle est strictement croissante.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

EXERCICE 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$.

1. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1+1} - (1 + \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$. Comme n est un entier naturel, $n+1$ et $n+2$ sont strictement positifs, donc $\frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$;

ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$; la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout entier naturel n , $n+1 \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, donc $1 < 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2$ et donc $1 \leq u_n \leq 2$.

3. La limite de la suite (u_n) est 1 .

EXERCICE 3 : 1. Les points D et E sur le cercle trigonométrique ci-contre définis à l'aide des angles en radian suivants :

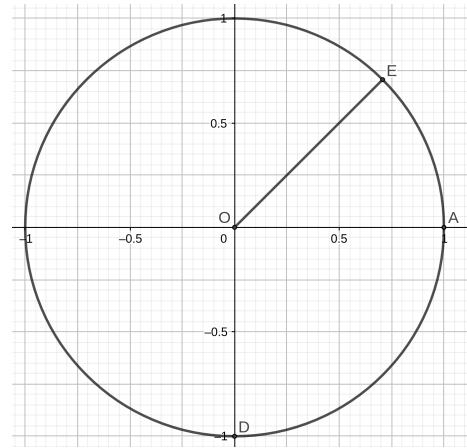
$$\widehat{AOD} = \frac{21\pi}{6} ; \quad \widehat{AOE} = \frac{-15\pi}{4}.$$

$$2. \cos(\widehat{AOD}) = \cos\left(\frac{21\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 ;$$

$$\sin(\widehat{AOD}) = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1 ;$$

$$\cos(\widehat{AOE}) = \cos\left(\frac{-15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\sin(\widehat{AOE}) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



EXERCICE 4 : Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes : a) $2\cos(x) - 1 = 0$ équivaut à $\cos(x) = \frac{1}{2}$;

les solutions sont $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; les solutions sont $\left\{ \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

EXERCICE 5 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(x) + 1$.

1. La fonction f est 2π -périodique : en effet, pour tout réel x , $f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) + 1 = 2\cos(x) + 1$ puisque la fonction cosinus est 2π -périodique, donc $f(x + 2\pi) = f(x)$.

2. Pour tout réel x , $f(-x) = 2\cos(-x) + 1 = 2\cos(x) + 1$ puisque la fonction cosinus est paire ; donc $f(-x) = f(x)$ et la fonction f est paire. On en déduit que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la représentation graphique de la fonction f .

3. Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

4. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-2 \leq 2\cos(x) \leq 2$,

donc $-1 \leq 2\cos(x) + 1 \leq 3$, $-1 \leq f(x) \leq 3$.

5. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$:

$$2\cos(x) + 1 = 0 \text{ équivaut à } \cos(x) = \frac{-1}{2} ;$$

les solutions sont $\left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right\}$.

x	0	π	2π
$f(x)$	3	-1	3

EXERCICE 1 : Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$; $v_0 = -4$ et $v_{n+1} = 2v_n$.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$;

la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -4$.

2. La suite (u_n) est arithmétique de raison strictement positive, donc elle est strictement croissante.

La suite (v_n) est géométrique de raison $2 > 1$ et de premier terme $v_0 = -4 < 0$, donc elle est strictement décroissante.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

EXERCICE 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

1. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1+1} - (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-(n+1) + (n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$. Comme n est un entier naturel, $n+1$ et $n+2$ sont strictement positifs, donc $\frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$; ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$; la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Pour tout entier naturel n , $n+1 \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, donc $-1 < \frac{-1}{n+1} \leq 0$, donc $0 < 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$ et donc $0 \leq u_n \leq 1$.

3. La limite de la suite (u_n) est 1.

EXERCICE 3 : 1. Les points D et E sur le cercle trigonométrique ci-contre définis à l'aide des angles en radian suivants :

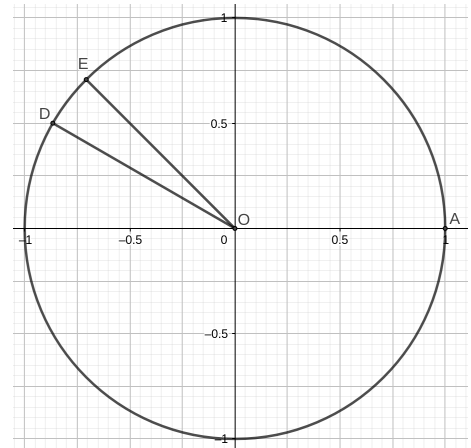
$$\widehat{AOD} = \frac{-31\pi}{6} ; \quad \widehat{AOE} = \frac{27\pi}{4}.$$

$$2. \cos(\widehat{AOD}) = \cos\left(\frac{-31\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\sin(\widehat{AOD}) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} ;$$

$$\cos(\widehat{AOE}) = \cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\sin(\widehat{AOE}) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



EXERCICE 4 : Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes : a) $2\sin(x) - 1 = 0$ équivaut à $\sin(x) = \frac{1}{2}$;

les solutions sont $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; les solutions sont $\left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

EXERCICE 5 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + 2$.

1. La fonction f est 2π -périodique : en effet, pour tout réel x , $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + 2 = \cos(x) + 2$ puisque la fonction cosinus est 2π -périodique, donc $f(x + 2\pi) = f(x)$.

2. Pour tout réel x , $f(-x) = \cos(-x) + 2 = \cos(x) + 2$ puisque la fonction cosinus est paire ; donc $f(-x) = f(x)$ et la fonction f est paire.

On en déduit que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la représentation graphique de la fonction f .

3. Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$:

4. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $1 \leq \cos(x) + 2 \leq 3$, donc $1 \leq f(x) \leq 3$.

5. Les solutions de l'équation $f(x) = 1,5$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$: $\cos(x) + 2 = 1,5$ équivaut à $\cos(x) = -0,5$;

les solutions sont $\left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right\}$.

x	0	π	2π
$f(x)$	3	1	3