LES EQUATIONS

1. Résolution des équations à une inconnue

a) L'équation du premier degré

Il s'agit des équations de la forme $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) ou s'y ramenant.

Exemple: $3x - 2 = x + 7$; on se ramène à l'équation précédente en écrivant $3x - x - 2 - 7 = 0$, qui s'écrit $2x - 9 = 0$.

L'unique solution d'une telle équation est $x = \dfrac{-b}{a}$.

La solution de l'exemple précédent est $\dfrac{9}{2}$.

Attention: La solution de l'équation $ax = 0$ est 0.

> L'unique solution de l'équation
>
> $ax + b = 0$ est $x = \dfrac{-b}{a}$.

b) Les équations à produit nul

Il s'agit des équations se présentant sous la forme d'un produit de facteurs de la forme $ax + b$, ce produit étant égal à 0.

La propriété à utiliser: Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

> L'équation $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

Il est parfois nécessaire de factoriser l'expression donnée pour se ramener à une équation à produit nul.

Exemples: 1) Résoudre l'équation $9x^2 - 4 = 0$; on factorise d'abord l'expression $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$, et ensuite, on résout l'équation $(3x - 2)(3x + 2) = 0$:

$3x - 2 = 0$ ou $3x + 2 = 0$; soit $x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = \dfrac{-2}{3}$. On note l'ensemble solution: $S = \{ \dfrac{2}{3} ; \dfrac{-2}{3} \}$.

2) Résoudre l'équation $x^2 - 25 = (x + 5)(2x - 1)$; on factorise d'abord l'expression $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, et ensuite, on résout l'équation $(x - 5)(x + 5) = (x + 5)(2x - 1)$ qui équivaut à $(x - 5)(x + 5) - (x + 5)(2x - 1) = 0$; on factorise par $(x + 5)$: $(x + 5)[(x - 5) - (2x - 1)] = 0$; on simplifie l'expression dans les crochets: $(x + 5)(-x - 4) = 0$; soit $x = - 5$ ou $x = - 4$. L'ensemble solution est $S = \{- 5 ; - 4\}$.

c) Les équations à quotient nul

Il s'agit des équations se présentant sous la forme d'un quotient dont le numérateur et le dénominateur sont des produits de facteurs de la forme $ax + b$, ce quotient étant égal à 0.

$\dfrac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ et $B \neq 0$.

Cas particulier: L'équation de la forme $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$ équivaut à $AD = BC$.

Exemples: 1)Résoudre l'équation $\dfrac{6x-15}{x+4} = 0$. Cette équation équivaut à $6x - 15 = 0$ et $x + 4 = 0$;

$6x - 15 = 0$ a pour solution $x = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$; cette solution n'annule pas le dénominateur $x + 4$; donc la solution de l'équation est $\dfrac{5}{2}$.

2) Résoudre l'équation $\dfrac{3x-5}{x+2} = \dfrac{6}{5}$. Pour $x \neq - 2$, cette équation équivaut à $5(3x - 5) = 6(x + 2)$, soit $15x - 25 = 6x + 12$; soit $15x - 6x - 25 - 1 = 0$; soit $9x - 26 = 0$; la solution de cette équation est $x = \dfrac{26}{9}$; cette solution est différente de 2; donc la solution de l'équation est $\dfrac{26}{9}$.

d) L'équation du second degré

Il s'agit des équations se présentant sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Cas particulier : L'équation $x^2 = k$. Si $k < 0$, cette équation n'a pas de solution.

Si $k = 0$, la solution est $x = 0$.

Si $k > 0$, Les solutions de cette équation sont $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$; cette équation équivaut à $x^2 = 2$; les deux solutions sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Cas général: La résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ est vue en classe de première.

2. Résolution des équations à deux inconnues

Il s'agit des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues qui se présentent sous la forme:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}.$$

Chaque équation correspond à l'équation d'une droite que l'on peut tracer dans un repère du plan.

Appelons (d) la droite d'équation $ax + by = c$, et (d') la droite d'équation $a'x + b'y = c'$.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\,(-b; a)$ et un vecteur directeur de (d') est $\vec{v}\,(-b'; a')$. Ces vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire si $ab' = a'b$, ou si $ab' - ba' = 0$. Dans ce cas, les droites (d) et (d') sont parallèles, et le système aura aucune solution ou une infinité de solutions.

Ainsi, un tel système peut avoir une unique solution, aucune solution ou une infinité de solutions.

Pour le savoir, on calcule $ab' - ba'$:

si $ab' - ba' \neq 0$, alors le système a une unique solution.

si $ab' - ba' = 0$, alors : si $cb' - bc' \neq 0$, alors le système n' a pas de solution.

si $cb' - bc' = 0$, alors le système a une infinité de solutions.

Lorsque le système a une unique solution, il y a plusieurs méthodes de résolution:

Les méthodes seront mises en évidence sur l'exemple suivant: Résoudre le système: $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=2 \end{cases}$.

On calcule $ab' - ba' = 2\times6 - 3\times5 = -3 \neq 0$, donc le système a une unique solution.

1) Méthode par combinaisons linéaires : on élimine une inconnue en multipliant les équations par des nombres et en les ajoutant : la première équation est notée L_1 et la deuxième L_2 :

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{matrix} 5L_1 \\ -2L_2 \end{matrix}\begin{cases} 10x+15y=-20 \\ -10x-12y=-4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{matrix} L_1 \\ 5L_1-2L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3y=-24 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ et on remplace la valeur de y dans la première équation pour trouver x : $\begin{cases} 2x+3\times(-8)=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x=20 \\ y=-8 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=10 \\ y=-8 \end{cases}$. Le couple solution est (10; – 8).

2) Méthode par comparaison : on écrit une inconnue en fonction de l'autre dans les deux équations et on compare pour obtenir une équation à une inconnue:

$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3y=-4-2x \\ 6y=2-5x \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=\frac{-4}{3}-\frac{2}{3}x \\ y=\frac{1}{3}-\frac{5}{6}x \end{cases}$. D'où $\frac{-4}{3}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{5}{6}x$ équivaut à

$\frac{-2}{3}x+\frac{5}{6}x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$ équivaut à $\frac{-4}{6}x+\frac{5}{6}x=\frac{5}{3}$ équivaut à $\frac{1}{6}x=\frac{5}{3}$ équivaut à $x=\frac{5}{3}\times6 = 10$;

et $y=\frac{-4}{3}-\frac{2}{3}\times10 = \frac{-24}{3} = -8$. Le couple solution est (10; – 8).

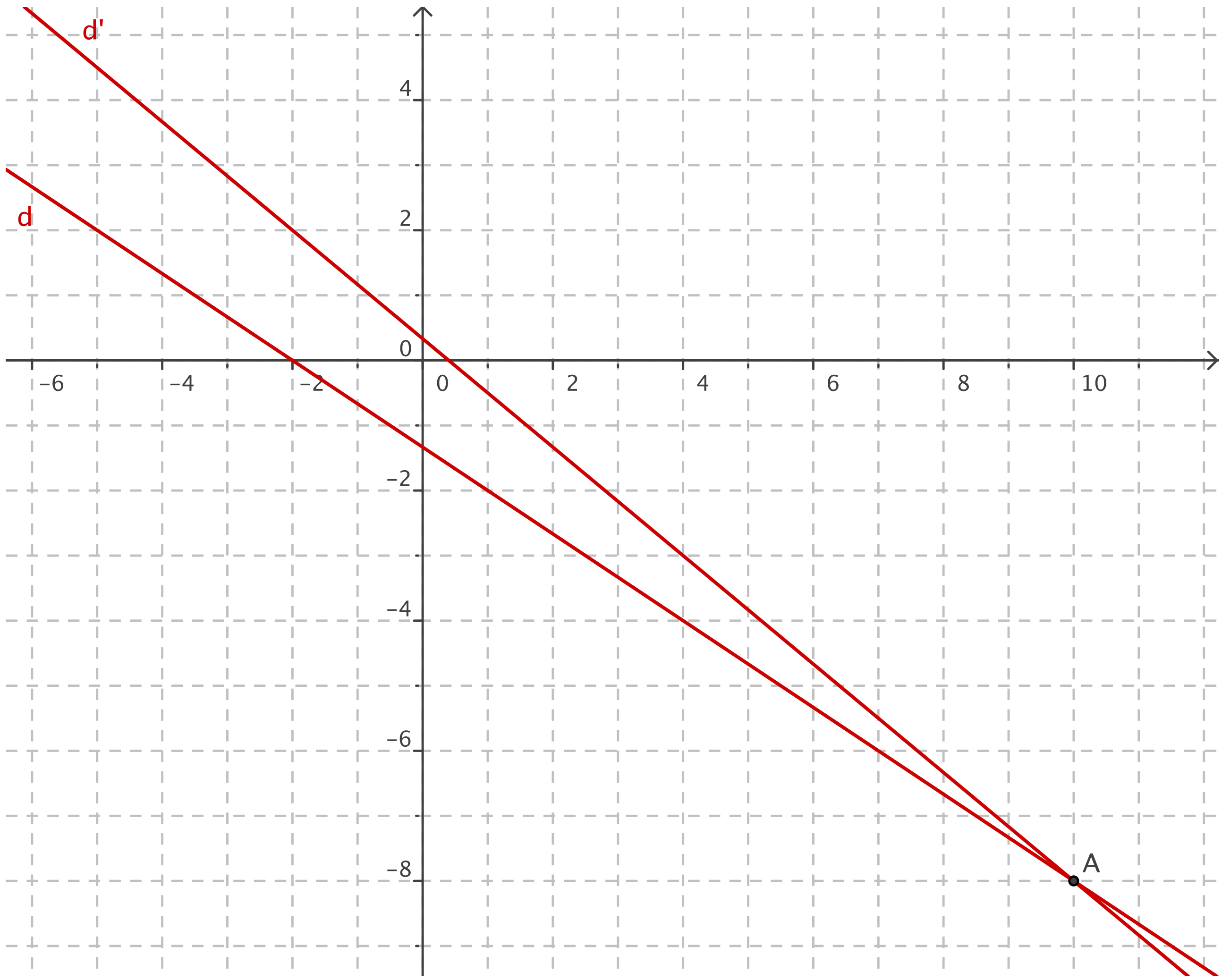
3) Méthode par substitution : on écrit une inconnue en fonction de l'autre dans une des deux équations et on remplace dans la deuxième pour obtenir une équation à une inconnue:

$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3y=-4-2x \\ 5x+6y=2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}-\dfrac{2}{3}x \\ 5x+6y=2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}-\dfrac{2}{3}x \\ 5x+6(\dfrac{-4}{3}-\dfrac{2}{3}x)=2 \end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}-\dfrac{2}{3}x \\ 5x-8-4x=2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}-\dfrac{2}{3}x \\ x=10 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=\dfrac{-4}{3}-\dfrac{2}{3}\times 10 \\ x=10 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=-8 \\ x=10 \end{cases}$.

Le couple solution est (10; – 8).

Voici la représentation graphique des deux droites associées aux équations $2x + 3y = -4$ (droite d) et $5x + 6y = 2$ (droite d'). Ces deux droites sont sécantes au point A de coordonnées (10; – 8).



Complément: La méthode par combinaisons linéaires est une méthode générale qui permet de résoudre des systèmes plus importants, par exemple des systèmes de trois équations à trois inconnues... Cette méthode permet de développer une méthode appelée le pivot de Gauss.