1. La fonction inverse

a) Définition : la fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. A tout nombre réel x non nul, on associe l'inverse de x.

b) Variations : Pour déterminer les variations de la fonction inverse, on étudie sur deux intervalles distincts :

- sur $]0\,;+\infty\,[$: on considère deux nombres réels a et b de cet intervalle tels que $a < b$;

alors $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$; le signe de $b - a$ est strictement positif puisque $a < b$; le signe de ab est strictement positif puisque a et b le sont.
Ainsi le nombre $\frac{b-a}{ab}$ est strictement positif, donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$, donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; la fonction inverse ne conserve pas l'ordre des nombres sur $]0\,;+\infty\,[$, donc c'est une fonction strictement décroissante sur $]0\,;+\infty\,[$.

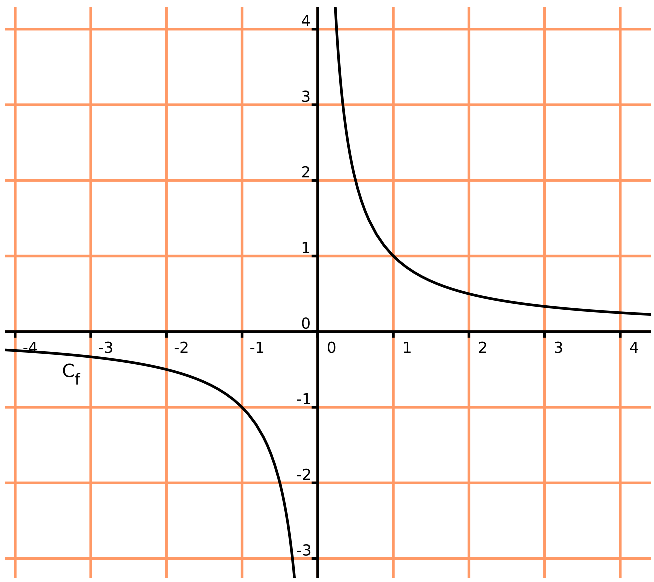
- sur $]-\infty\,;0[$: on considère deux nombres réels a et b de cet intervalle tels que $a < b$;

alors $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$; le signe de $b - a$ est strictement positif puisque $a < b$; le signe de ab est strictement positif puisque a et b sont tous les deux négatifs.
Ainsi le nombre $\frac{b-a}{ab}$ est strictement positif, donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; la fonction inverse ne conserve pas l'ordre des nombres sur $]-\infty\,;0[$, donc c'est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

c) Tableau de variations :On obtient alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

d) Représentation graphique :
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une hyperbole.



L'origine du repère, le point O est un centre de symétrie de la courbe ; en effet :
Soit x un nombre réel, on a alors $-\frac{1}{x} = \frac{-1}{x}$;
donc les points $M(x\,;\frac{1}{x})$ et $M'(-x\,;-\frac{1}{x})$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Une fonction vérifiant une telle propriété est appelée fonction impaire.

2. Comparaison de nombres et inéquations :

a) Propriété : cette propriété se déduit du tableau de variations de la fonction inverse:

si $0 < a \leqslant b$, alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$; si $a \leqslant b < 0$, alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.

Les inverses de deux nombres positifs sont rangés dans l'ordre inverse de ces deux nombres.

Les inverses de deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de ces deux nombres.

b) Résolution d'inéquations : Il s'agit de résoudre des inéquations de la forme $\frac{1}{x} < a$ (ou $\frac{1}{x} > a$, $\frac{1}{x} \leqslant a$, $\frac{1}{x} \geqslant a$) où a est un réel donné.

Exemples : 1) résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \leqslant 4$. D'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est l'intervalle S = $[\frac{1}{4}\ ;+\infty[$.

2) résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geqslant 7$. D'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est : S = $]\,0;\ \frac{1}{7}\,]$.

c) Encadrement de nombres : on cherche à encadrer une expression de x faisant intervenir des inverses à l'aide d'un encadrement de x.

Exemples : 1) Soit $3 < x < 4$; trouver un encadrement de $\frac{2}{x} - 1$: On a successivement $\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$;

$\frac{2}{4} < \frac{2}{x} < \frac{2}{3}$; $\frac{2}{4} - 1 < \frac{2}{x} - 1 < \frac{2}{3} - 1$; $\frac{-1}{2} < \frac{2}{x} - 1 < \frac{-1}{3}$.

2) Encadrer $2 - \frac{5}{x}$ sachant que $-3 \leqslant x \leqslant -2$:

On a successivement $\frac{-1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{-1}{3}$; $\frac{-5}{2} \leqslant \frac{5}{x} \leqslant \frac{-5}{3}$; $\frac{5}{3} \leqslant \frac{-5}{x} \leqslant \frac{5}{2}$;

$2 + \frac{5}{3} \leqslant 2 + \frac{-5}{x} \leqslant 2 + \frac{5}{2}$; $\frac{11}{3} \leqslant 2 + \frac{-5}{x} \leqslant \frac{9}{2}$.

2. Les fonctions homographiques

a) Définition : les fonctions homographiques sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{-d}{c}\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des nombres réels avec c non nul et $ad - bc$ non nul.

Le tableau de variations d'une fonction homographique :

Si $ad - bc > 0$					
x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{a}{c}$

Si $ad - bc < 0$					
x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{a}{c}$

b) Représentation graphique :

La représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole.

Le centre de symétrie de l'hyperbole a pour coordonnées ($\frac{-d}{c}$; $\frac{a}{c}$).

c) Exemples : a) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

On peut écrire $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$. Le centre de symétrie de l'hyperbole a pour coordonnées (1 ; 2).

Comme $ad - bc = -3 < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 1[$ et sur $]1\ ; +\infty[$.

Le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2