COURS SECONDE LA FONCTION CARRÉE

1. La fonction carrée

a) Définition : la fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. A tout nombre réel x, on associe le carré de x.

b) Variations : Pour déterminer les variations de la fonction carrée, on étudie sur deux intervalles distincts :

- sur $[0 ; +\infty[$: on considère deux nombres réels a et b de cet intervalle tels que a < b ;

alors $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; le signe de $a + b$ est strictement positif puisque les deux nombres sont positifs et $a < b$; le signe de $a - b$ est strictement négatif puisque si $a < b$ alors $a - b < 0$.
Ainsi le produit $(a + b)(a - b)$ est strictement négatif, donc $a^2 - b^2 < 0$, donc $a^2 < b^2$; la fonction carrée conserve l'ordre des nombres sur $[0 ; +\infty[$, donc c'est une fonction strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

- sur $]-\infty ; 0]$: on considère deux nombres réels a et b de cet intervalle tels que a < b ;

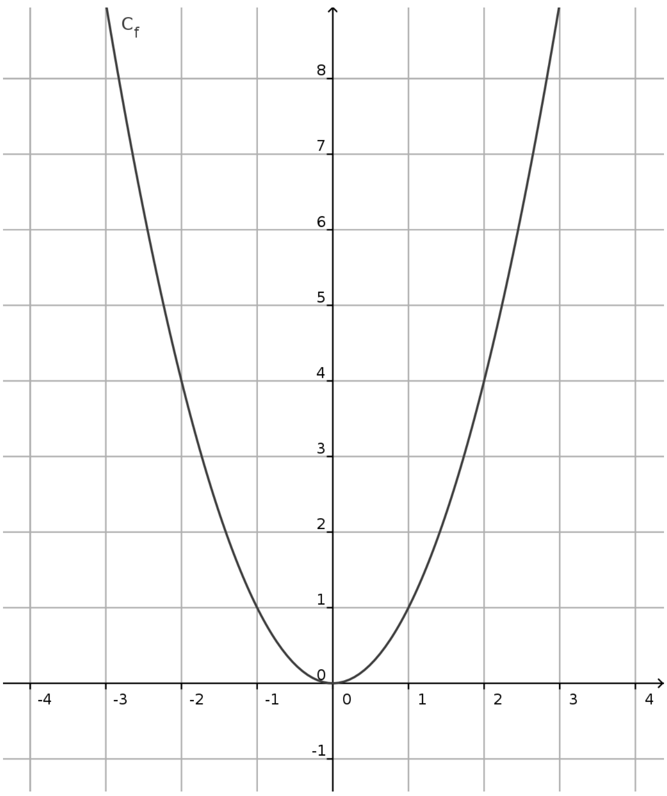
alors $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; le signe de $a + b$ est strictement négatif puisque les deux nombres sont négatifs et $a < b$; le signe de $a - b$ est strictement négatif puisque si $a < b$ alors $a - b < 0$.
Ainsi le produit $(a + b)(a - b)$ est strictement positif, donc $a^2 - b^2 > 0$, donc $a^2 > b^2$; la fonction carrée inverse l'ordre des nombres sur $]-\infty ; 0]$, donc c'est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

c) Tableau de variations :
On obtient alors le tableau de variations :
Le minimum de la fonction carrée est 0 atteint pour $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Représentation graphique :
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une <u>parabole</u>.
L'origine du repère, le point O est le <u>sommet</u> de la parabole.
On remarque que cette courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie ; en effet :
Soit x un nombre réel, on a alors $(-x)^2 = x^2$; donc les points $M(x ; x^2)$ et $M'(-x ; (-x)^2)$ ont la même ordonnée et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Une fonction vérifiant une telle propriété est appelée <u>fonction paire</u>.



2. Comparaison de nombres et inéquations :

a) Propriété : cette propriété se déduit du tableau de variations de la fonction carrée :
si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$;
si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \geqslant b^2$.
Les carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces deux nombres.
Les carrés de deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de ces deux nombres.

b) Résolution d'inéquations : Il s'agit de résoudre des inéquations de la forme $x^2 < a$ (ou $x^2 > a$, $x^2 \leqslant a$, $x^2 \geqslant a$) où a est un réel donnée.
Exemples : 1) résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant 4$. D'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est l'intervalle $S = [-2 ; 2]$.
2) résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant 7$. D'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est la réunion d'intervalles : $S =]-\infty ; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7} ; +\infty[$.
c) Encadrement de nombres : on cherche à encadrer une expression de x faisant intervenir des carrés à l'aide d'un

encadrement de x.
Exemples : 1) Soit $1 < x < 3$; trouver un encadrement de $2x^2 - 1$: Comme x est strictement positif, on a successivement $1 < x^2 < 9$; $2 < 2x^2 < 18$; $1 < 2x^2 - 1 < 17$.
2) Encadrer $2x^2 - 3$ sachant que $-3 \leqslant x \leqslant -2$:
Comme x est strictement négatif, $-3 \leqslant x \leqslant -2$ entraîne $9 \geqslant x^2 \geqslant 4$, soit $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$, d'où $8 \leqslant 2x^2 \leqslant 18$,
d'où $5 \leqslant 2x^2 - 3 \leqslant 15$.
3) On considère un rectangle dont les dimensions (en centimètres) sont $2x + 4$ et $3x + 7$. Donner un encadrement de l'aire de ce rectangle sachant que $0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}4$.
L'aire du rectangle est égale à $(2x + 4)(3x + 7) = 6x^2 + 26x + 28$.
On a $0{,}09 \leqslant x^2 \leqslant 0{,}16$, d'où $0{,}54 \leqslant 6x^2 \leqslant 0{,}96$; de plus $7{,}8 \leqslant 26x \leqslant 10{,}4$;
donc $0{,}54 + 7{,}8 + 28 \leqslant 6x^2 + 26x + 28 \leqslant 0{,}96 + 10{,}4 + 28$, soit $36{,}34 \leqslant 6x^2 + 26x + 28 \leqslant 39{,}36$.
L'aire du rectangle est comprise entre 36,34 cm² et 39,36 cm².

2. Les polynômes du second degré

a) Définition : les polynômes du second degré sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$,
où a, b et c sont des nombres réels avec a non nul.

Le tableau de variations d'un polynôme du seconde degré :

Si $a > 0$					
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$					
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

b) Représentation graphique :
La représentation graphique d'un polynôme du second degré est une parabole.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées ($\frac{-b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$).
La droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si le nombre a est strictement positif, alors la parabole est tournée vers le haut, et la fonction f admet un minimum m atteint lorsque $x = \frac{-b}{2a}$.
Si le nombre a est strictement négatif, alors la parabole est tournée vers le bas, et la fonction f admet un maximum M atteint lorsque $x = \frac{-b}{2a}$.

c) Exemples : a) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 5$.
On peut écrire $f(x) = (x + 3)^2 - 14$. Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(-3 ; -14)$.
La droite d'équation $x = -3$ est l'axe de symétrie de la courbe représentative C_f .
Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut, et la fonction f admet un minimum égal à -14 atteint lorsque $x = -3$.
Le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-14	$\nearrow$	$+\infty$

La parabole représentative de cette fonction admet la droite d'équation $x = -3$ comme axe de symétrie.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 2$.
On peut écrire $g(x) = -2(x-2)^2 + 6$. Le sommet de la parabole a pour coordonnées (2 ; 6).
La droite d'équation $x = 2$ est l'axe de symétrie de la courbe C_g .
Comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas, et la fonction f admet un maximum égal à 6 atteint lorsque $x = 2$.
Le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$			6		
	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$

La parabole représentative de cette fonction admet la droite d'équation $x = 2$ comme axe de symétrie.