COURS **SECONDE** **LES FONCTIONS NUMERIQUES**

1. Notion de fonction

Une fonction f définie sur un intervalle I associe à chaque nombre réel de cet intervalle I un nombre et un seul: A chaque réel x de I, on associe un nombre noté $f(x)$. On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.

Notation: $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$.

Soit a un réel dans I et $b = f(a)$. Alors b est **l'image** de a par la fonction f, et a est un **antécédent** de b par f.

Exemples: $f(x) = x^2$; $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$; $f(x) = 2x - 3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

2. Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x qui rendent possible le calcul de $f(x)$. Cet ensemble est noté D_f .

Exemples: $f(x) = x^2$; $D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$; $D_f = \mathbb{R}$;

$f(x) = \sqrt{x}$; $D_f = [0; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3. Représentation graphique d'une fonction

La représentation graphique de la fonction f définie sur I est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ où x est dans I. Dans un repère du plan, les valeurs de x se placent sur l'axe des abscisses, celles de $f(x)$ se placent sur l'axe des ordonnées. Cet ensemble est une courbe, noté C_f . L'équation de cette courbe est $y = f(x)$.

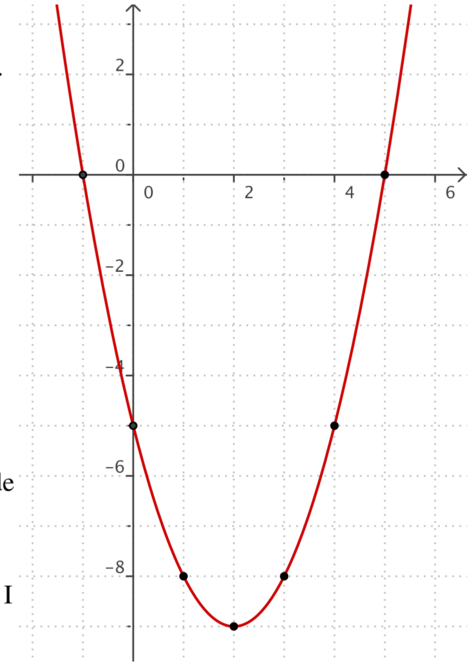
Pour obtenir cette représentation graphique, on peut utiliser un tableau de valeurs, où l'on choisit plusieurs valeurs dans l'intervalle I, et on calcule leur image par la fonction f.

Exemple: $f(x) = x^2 - 4x - 5$ sur l'intervalle $[-2; 6]$.

Tableau de valeurs:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

La représentation graphique obtenue est donnée ci-contre:



4. Sens de variation d'une fonction

On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle I, si cette fonction conserve l'ordre des nombres sur I; c'est-à-dire, si pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.

On dit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle I, si cette fonction inverse l'ordre des nombres sur I; c'est-à-dire, si pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.

Interprétation graphique: Lorsque la fonction f est croissante sur I, la courbe monte lorsque x croit; lorsque la fonction f est décroissante sur I, la courbe descend lorsque x croit.

Exemple: $f(x) = x^2 - 4x - 5$ sur l'intervalle $[-2; 6]$. La fonction f est décroissante sur $[-2; 2]$ et croissante sur $[2; 6]$.

5. Tableau de variation

C'est un tableau qui rassemble des données sur les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Pour une fonction f croissante sur $[a; b]$:

x	a		b
$f(x)$			$f(b)$
	$f(a)$	↗	

Pour une fonction f décroissante sur $[a; b]$:

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$		
		↘	$f(b)$

6. Extremums d'une fonction

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

La fonction f admet un **maximum** en a sur I si, pour tout réel x de I, $f(a) \geqslant f(x)$.

La fonction f admet un **minimum** en a sur I si, pour tout réel x de I, $f(a) \leqslant f(x)$.

La fonction f admet un **extremum** en a sur I si elle admet un maximum ou un minimum.

Exemple: On reprend la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x - 5$ sur l'intervalle [– 2; 6] dont la courbe est donnée ci-dessus. Cette fonction admet un maximum égal à 7 atteint en $x = -2$ et en $x = 6$.

Elle admet aussi un minimum égal à –9 atteint en $x = 2$.

7. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

On considère une fonction f définie sur un intervalle I dont la courbe représentative C_f est donnée.

a) Résolution d'équations : On cherche à résoudre des équations de la forme $f(x) = k$ où le nombre k est un réel.

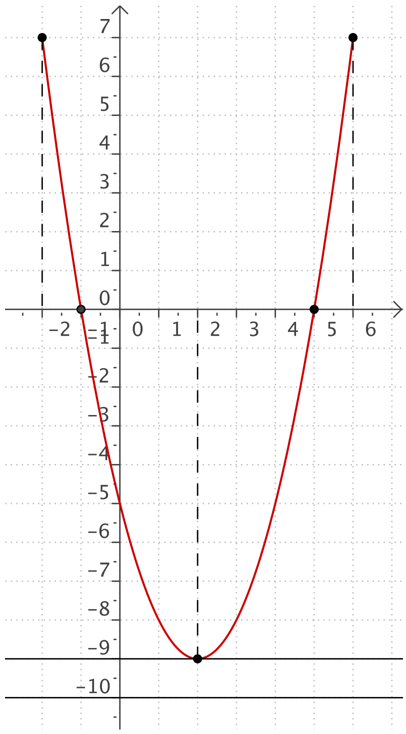
Pour cela, on trace la droite d'équation $y = k$ (parallèle à l'axe des abscisses), et on place les points d'intersection de cette droite avec C_f. Les abscisses de ces points d'intersection sont les solutions de l'équation $f(x) = k$.

Cette résolution revient à trouver les **antécédents** de k par la fonction f.

Attention: il peut ne pas y avoir de solutions.

Exemple: Avec la fonction de l'exemple étudié plus haut, résoudre les équations $f(x) = 0$, $f(x) = -9$, $f(x) = -10$.

Avec le graphique ci-contre, on détermine les solutions de ces équations:



$f(x) = 0$; il y a deux solutions qui sont – 1 et 5.

On note l'ensemble solution: S = {– 1; 5}.

$f(x) = -9$; il y a une unique solution qui est 2. S = {2}

$f(x) = -10$; il n'y a aucune solution. On note S = $\varnothing$ (ensemble vide).

b) Résolution d'inéquations : On cherche à résoudre des inéquations de la forme $f(x) > k$, $f(x) < k$, $f(x) \geqslant k$, ou $f(x) \leqslant k$, où le nombre k est un réel. Pour cela, on trace la droite d'équation $y = k$ (parallèle à l'axe des abscisses), et on place les points d'intersection de cette droite avec C_f.

Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite sans les abscisses des points d'intersection.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite y compris les abscisses des points d'intersection.

Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite sans les abscisses des points d'intersection.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite y compris les abscisses des points d'intersection.

Exemple : Avec la fonction de l'exemple étudié plus haut, résoudre les inéquations $f(x) < 0$, $f(x) \geqslant -9$.

Avec le graphique ci-contre, on détermine les solutions de ces inéquations:

$f(x) < 0$; la solution est l'intervalle]– 1; 5[.

$f(x) \geqslant -9$; la solution est l'intervalle [– 2; 6].

c) On peut aussi être amené à résoudre des équations de la forme $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I. La solution est l'ensemble des abscisses des points d'intersection des deux courbes.

On peut aussi être amené à résoudre des inéquations de la forme $f(x) \geqslant g(x)$ (respectivement $f(x) \leqslant g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$) . La solution est l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de C_g (respectivement l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessous de C_g, l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de C_g sans les abscisses des points d'intersection, l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessous de C_g sans les abscisses des points d'intersection).