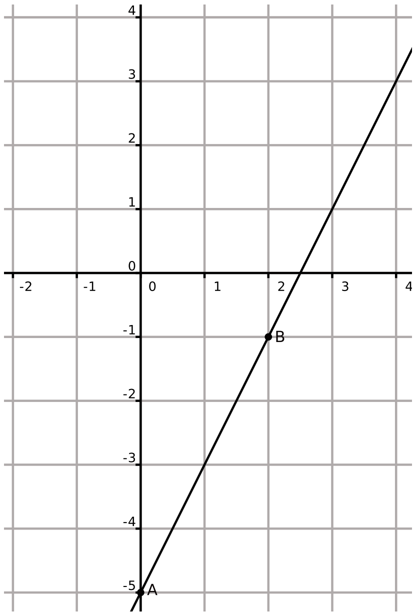
1. Définition

On considère deux réels a et b. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine.
Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = ax + b$.



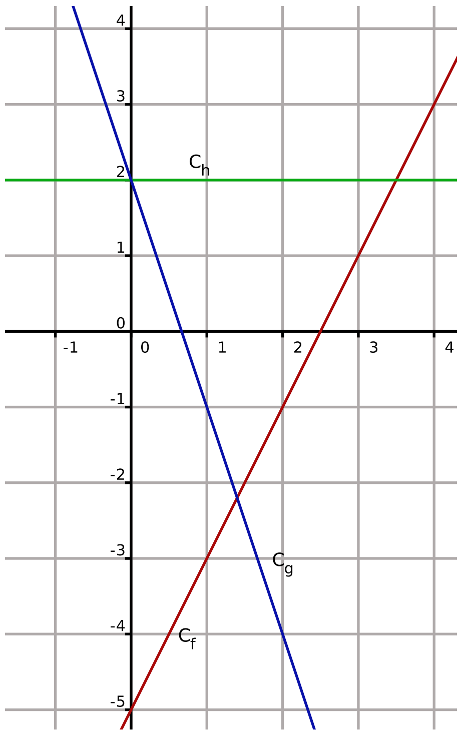
Le nombre a s'appelle le coefficient directeur de la droite.
Le nombre b est l'ordonnée à l'origine : la droite passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.

Exemple : $f(x) = 2x - 5$.
Pour représenter la fonction f, on choisit deux valeurs de x , on calcule leur image, on place les deux points dans un repère du plan et on trace la droite passant par ces deux points.
Si $x = 0$, $f(0) = -5$; la droite passe par le point A$(0 ; -5)$.
Si $x = 2$, $f(2) = 4 - 5 = -1$; la droite passe par le point B$(2 ; -1)$.

Cas particuliers :
- Si $b = 0$, la fonction est dite linéaire. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.
- Si a = 0, la fonction est constante. Sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Caractérisation : les fonctions affines sont les fonctions dont les accroissements des images sont proportionnels aux accroissements des valeurs de x. En effet, soit u et v deux nombres réels distincts.
Alors $\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = \frac{au+b-(av+b)}{u-v} = \frac{au-av}{u-v} = \frac{a(u-v)}{u-v} = a$ qui est une constante.

2. Sens de variation



Propriété : Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Considérons deux réels u et v tels que $u < v$.
Alors $f(u) - f(v) = au + b - (av + b) = au - av = a(u - v)$.
Comme $u < v$ alors $u - v < 0$.
Ainsi, si $a > 0$, $f(u) - f(v) < 0$, donc $f(u) < f(v)$; la fonction f conserve l'ordre et la fonction f est croissante.
Si $a = 0$, $f(u) = f(v)$ et la fonction f est constante.
Si $a < 0$, $f(u) - f(v) > 0$, donc $f(u) > f(v)$; la fonction f inverse l'ordre et la fonction f est décroissante.

Exemple : $f(x) = 2x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$; $g(x) = -3x + 2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$; $h(x) = 2$ est constante sur $\mathbb{R}$. (ci-contre)

3. Signe de $ax + b$

Dans ce paragraphe, on suppose $a \neq 0$.
Propriété : Le signe de $ax + b$ suivant les valeurs de x est donné par l'un des deux tableaux suivants :

$a > 0$					
x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		$-$	0	$+$	

$a < 0$					
x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		$+$	0	$-$	

Démonstration :

La solution de l'équation $ax + b = 0$ est $x = \dfrac{-b}{a}$.

Si $a > 0$, et si $x \geqslant \dfrac{-b}{a}$, alors $ax \geqslant -b$ et $ax + b \geqslant 0$; si $x \leqslant \dfrac{-b}{a}$, alors $ax \leqslant -b$ et $ax + b \leqslant 0$.

Si $a < 0$, et si $x \geqslant \dfrac{-b}{a}$, alors $ax \leqslant -b$ et $ax + b \leqslant 0$; si $x \leqslant \dfrac{-b}{a}$, alors $ax \geqslant -b$ et $ax + b \geqslant 0$.

Exemple :

$a > 0$					
x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $2x - 4$		$-$	0	$+$	

$a < 0$					
x	$-\infty$		$\dfrac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x + 5$		$+$	0	$-$	

4. <u>Résolution d'inéquations</u>

On cherche à résoudre des inéquations se présentant sous la forme d'un produit de facteurs de la forme $ax + b$, ce produit étant supérieur ou inférieur à 0. On réalise un tableau de signes donnant le signe de chacun des facteurs de la forme $ax + b$, et le signe du produit.

On utilise pour cela le signe de $ax + b$ vu précédemment.

Une propriété à utiliser: Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

Il est parfois nécessaire de factoriser l'expression donnée pour se ramener à une inéquation à produit supérieur ou inférieur à 0.

Exemples: 1) Résoudre l'inéquation $9x^2 - 4 < 0$; on factorise d'abord l'expression $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$, et ensuite, on résout l'inéquation $(3x - 2)(3x + 2) < 0$ en réalisant un tableau de signes:

$3x - 2 = 0$, lorsque $x = \dfrac{2}{3}$; $3x + 2 = 0$, soit $x = \dfrac{-2}{3}$

x	$-\infty$		$\dfrac{-2}{3}$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $3x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit $(3x - 2)(3x + 2) < 0$, doit être strictement négatif ; ceci est réalisé lorsque $x \in \left] \dfrac{-2}{3} ; \dfrac{2}{3} \right[$.

Donc la solution de l'inéquation $9x^2 - 4 < 0$ est $S = \left] \dfrac{-2}{3} ; \dfrac{2}{3} \right[$.