

1) Droites et centres remarquables d'un triangle

	<p>Les <u>médianes</u> d'un triangle sont concourantes en un point G appelé <u>centre de gravité</u> du triangle. Ce point est situé au deux tiers de la médiane à partir du sommet. On a alors l'égalité : $GA = 2 GA'$; $GB = 2GB'$; $GC = 2GC'$. La médiane $[AA']$ sépare l'aire du triangle ABC en deux aires égales.</p>
	<p>Les <u>hauteurs</u> d'un triangle sont concourantes en un point H appelé <u>orthocentre</u> du triangle. Si le triangle ABC est rectangle en C, alors l'orthocentre est le point C. Si H est l'orthocentre du triangle ABC, C est l'orthocentre du triangle AHB.</p>
	<p>Les <u>bissectrices</u> d'un triangle sont concourantes en un point I qui est le <u>centre du cercle inscrit</u> au triangle. La bissectrice d'un angle étant l'ensemble des points équidistants des deux côtés adjacents à l'angle, on a : $IU = IV = IW$. (IU) et (AC) sont perpendiculaires.</p>
	<p>Les <u>médiatrices</u> d'un triangle sont concourantes en un point O qui est le <u>centre du cercle circonscrit</u> au triangle. La médiatrice d'un côté étant l'ensemble des points équidistants des deux extrémités du segment, on a : $OA = OB = OC$. Le point O est aussi l'orthocentre du triangle A'B'C'.</p>

2) Triangle rectangle et théorème de Pythagore

Théorème: Si ABC est un triangle rectangle en C, alors $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Réciproque: Si dans un triangle ABC, $AB^2 = BC^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle en C.

Théorème: Si ABC est un triangle rectangle en C, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB]. Le centre du cercle circonscrit est le milieu de [AB].

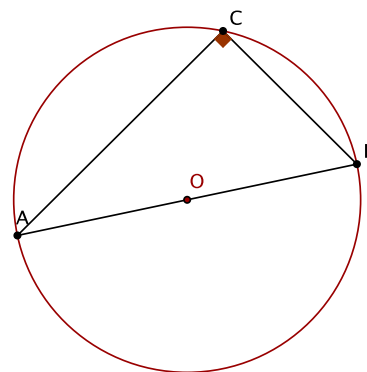
Réciproque: Si le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AB] alors il est rectangle en C.

Voir animations : <http://dominique.frin.free.fr/geogebra/pythagore.html>

Propriétés : Si le triangle ABC est rectangle en C, et O le milieu de [AB], alors la médiane [CO] a pour longueur la moitié de [AB].

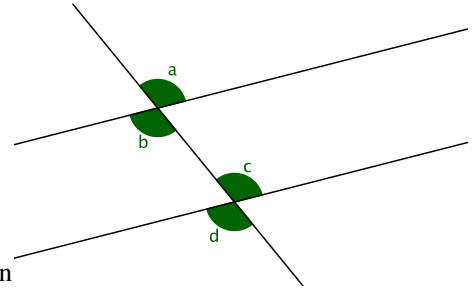
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soient deux point A et B du plan. L'ensemble des points M du plan tel que le triangle ABM est rectangle en M est le cercle de diamètre [AB] (privé des points A et B).



3) Les angles

a) **Égalités d'angles** : Par deux droites parallèles et une sécante, on forme comme sur la figure ci-contre:
des angles correspondants a et c , ainsi que b et d ;
des angles alternes-internes b et c , des angles alternes-externes a et d .



b) **Angles complémentaires** : deux angles sont complémentaires si leur somme égale 90° . Dans un triangle ABC rectangle en A, les angles en B et en C sont complémentaires.

c) **Angles supplémentaires** : deux angles sont supplémentaires si leur somme égale 180° .

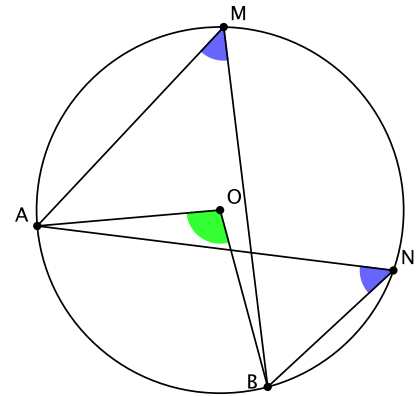
Dans un parallélogramme ABCD les angles adjacents (en A et en B par exemple) sont supplémentaires.

d) **Angles inscrits, angles au centre** :

➤ L'angle inscrit \widehat{AMB} a pour mesure la moitié de l'angle au centre \widehat{AOB} .
Ces deux angles interceptent le même arc de cercle.

➤ Les angles \widehat{AMB} et \widehat{ANB} interceptent le même arc de cercle, donc sont de même mesure.

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$



Voir exercice sur les angles :

<http://dominique.frin.free.fr/seconde/anglesf2.htm>

4) Théorème de Thalès

a) **Théorème de Thalès**: Si les triangles ABC et AMN sont tels que M est sur (AB), N est sur (AC) et les droites (MN) et (BC) sont parallèles,

$$\text{alors } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

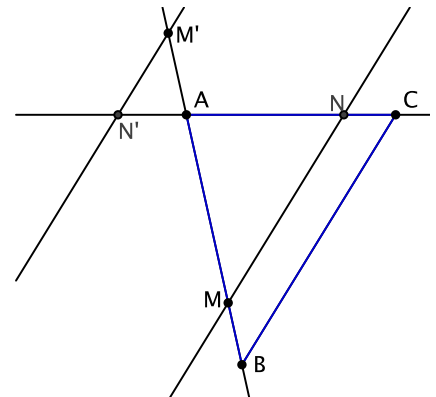
b) **Réciproque**: Si ABC est un triangle tel que M est sur (AB), N est sur (AC) et

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles,

$$\text{et } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

c) **Remarques**:

- Si k est le rapport de proportionnalité entre les cotés des deux triangles, le rapport entre leurs aires sera k^2 .
- Le théorème de la droite des milieux est un cas particulier du théorème de Thalès.



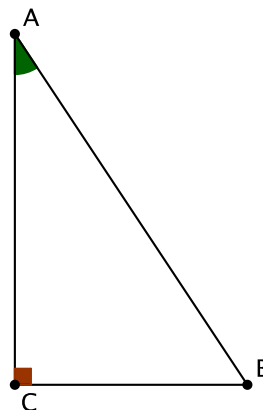
5) Trigonométrie dans le triangle rectangle

a) Dans un triangle ABC rectangle en C, on définit :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB},$$

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB},$$

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AC}.$$



b) Valeurs remarquables de sinus, cosinus et tangente

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en C tel que AC = BC = 1.

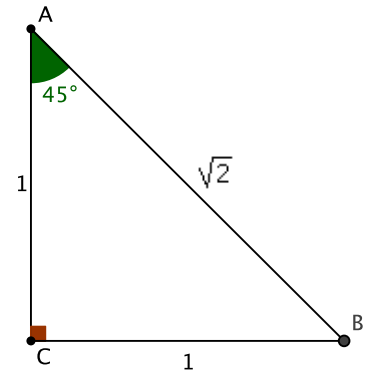
Le triangle ABC étant isocèle rectangle en C, $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 45^\circ$.

D'après Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$ ($AB \neq -\sqrt{2}$ car c'est une longueur !)

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1} = 1.$$



Soit ABC un triangle équilatéral de coté 1. Appelons H le pied de la hauteur issue de B.

Le triangle ABC étant équilatéral, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Dans un triangle équilatéral, hauteurs et médianes sont confondues donc H est aussi

le milieu de [AC] donc $AH = \frac{1}{2}$.

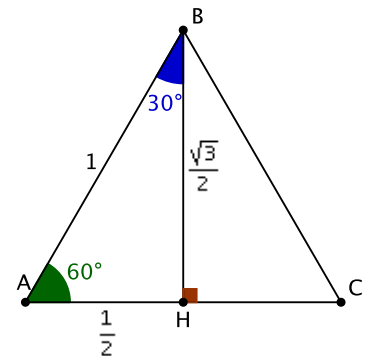
D'après Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on a : $AB^2 = AH^2 + BH^2$

donc $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, donc $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($BH \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ car

c'est une longueur !).

$$\cos 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{2}; \quad \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}.$$



Le triangle ABC étant équilatéral, hauteurs et bissectrices sont confondues, donc $\widehat{ABH} = 60^\circ/2 = 30^\circ$.

$$\cos 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{2}; \quad \tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Résumé :

x	30°	45°	60°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$