LES INEQUATIONS

1. Résolution des inéquations à une inconnue

a) L'inéquation du premier degré

Il s'agit des inéquations de la forme $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \geqslant 0$ ou $ax + b \leqslant 0$ (avec $a \neq 0$) ou s'y ramenant.

Exemple: $3x - 2 \geqslant x + 7$; on se ramène à une des inéquations précédentes en écrivant $3x - x - 2 - 7 \geqslant 0$, qui s'écrit $2x - 9 \geqslant 0$. La solution de cette inéquation est $x \geqslant \frac{9}{2}$ qui peut s'écrire $x \in [\frac{9}{2} ; +\infty[$.

Inéquation		$ax + b > 0$	$ax + b < 0$	$ax + b \geqslant 0$	$ax + b \leqslant 0$
Solution	Si $a > 0$	$x \in]\frac{-b}{a} ; +\infty[$	$x \in]-\infty ; \frac{-b}{a}[$	$x \in [\frac{-b}{a} ; +\infty[$	$x \in]-\infty ; \frac{-b}{a}]$
	Si $a < 0$	$x \in]-\infty ; \frac{-b}{a}[$	$x \in]\frac{-b}{a} ; +\infty[$	$x \in]-\infty ; \frac{-b}{a}]$	$x \in [\frac{-b}{a} ; +\infty[$

Attention: La solution de l'inéquation $ax > 0$ est $x \in]0; +\infty[$ si $a > 0$ et $x \in]-\infty ; 0[$ si $a < 0$.

b) Les inéquations produit

Il s'agit des inéquations se présentant sous la forme d'un produit de facteurs de la forme $ax + b$, ce produit étant supérieur ou inférieur à 0. On réalise un tableau de signes donnant le signe de chacun des facteurs de la forme $ax + b$, et le signe du produit. On utilise pour cela le signe de $ax + b$ traité dans le chapitre sur les fonctions affines.

Voir le cours sur les fonctions affines : http://dominique.frin.free.fr/seconde/cours2_fctaffine.pdf .

Une propriété à utiliser: Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

Il est parfois nécessaire de factoriser l'expression donnée pour se ramener à une inéquation à produit supérieur ou inférieur à 0.

Exemples: 1) Résoudre l'inéquation $9x^2 - 4 < 0$; on factorise d'abord l'expression $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$, et ensuite, on résout l'inéquation $(3x - 2)(3x + 2) < 0$ en réalisant un tableau de signes:

$3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$; $3x + 2 = 0$, soit $x = \frac{-2}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $3x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le signe du produit se détermine grâce à la règle du produit des signes:
$+ \times + = +$;
$+ \times - = -$;
$- \times + = -$;
$- \times - = +$.

Le produit $(3x - 2)(3x + 2) = 9x^2 - 4$ doit être < 0 (strictement négatif), donc la solution de cette inéquation est l'intervalle $]\frac{-2}{3} ; \frac{2}{3}[$. On note l'ensemble solution: $S =]\frac{-2}{3} ; \frac{2}{3}[$.

2) Résoudre l'inéquation $x^2 - 25 \geqslant (x + 5)(2x - 1)$; on compare l'expression à 0 : $x^2 - 25 - (x + 5)(2x - 1) \geqslant 0$, puis on factorise l'expression $(x - 5)(x + 5) - (x + 5)(2x - 1) \geqslant 0$, puis on factorise par le facteur commun $(x + 5)[(x - 5) - (2x - 1)] \geqslant 0$, on simplifie l'expression $(x + 5)[-x - 4] \geqslant 0$, et ensuite, on réalise un tableau de signes

x	$-\infty$		-5		-4		$+\infty$
Signe de $x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x - 4$		$+$	0	$+$	0	$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit doit être positif ou nul, donc la solution de cette inéquation est l'intervalle $[-5 ;-4]$.

L'ensemble solution est $S = [-5 ;-4]$.

b) Les inéquations quotient

Il s'agit des inéquations se présentant sous la forme d'un quotient de facteurs de la forme $ax + b$, ce quotient étant supérieur ou inférieur à 0. On réalise un tableau de signes donnant le signe de chacun des facteurs de la forme $ax + b$, et le signe du quotient.
Attention : une valeur interdite intervient dans le tableau.

Exemples: 1) Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-4}{x+3} \leqslant 0$; on factorise d'abord l'expression $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, et ensuite, on résout l'inéquation $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+3} \leqslant 0$; en réalisant un tableau de signes:

x	$-\infty$		-3		-2		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		–		–		–	0	+	
Signe de $x+2$		–		–	0	+		+	
Signe de $x+3$		–	0	+		+		+	
Signe du quotient		–	‖	+	0	–	0	+	

Attention : la valeur -3 est une valeur interdite car elle annule le dénominateur.
Le quotient $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+3}$ doit être négatif, donc la solution de cette inéquation est $S =]-\infty; -3[\cup [-2; 2]$.

2. Résolution des inéquations à deux inconnues

Il s'agit des inéquations de la forme $ax + by + c > 0$ (respectivement < 0 ou $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$) ou s'y ramenant.
On considère l'équation $ax + by + c = 0$ qui est l'équation d'une droite du plan. Les solutions des inéquations précédentes sont les coordonnées des points du plan contenus dans un demi-plan de frontière cette droite (la droite est incluse dans la solution si l'inégalité est au sens large : $\geqslant$ ou $\leqslant$).
Pour déterminer le demi-plan solution, il suffit de tester si un point en dehors de la droite a des coordonnées qui vérifient l'inégalité.

Exemple : Résoudre l'inéquation : $3x - 2y + 1 \geqslant 0$.
On trace dans le plan la droite d'équation $3x - 2y + 1 = 0$ d'équation réduite $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
En considérant l'origine du repère, ses coordonnées vérifient l'inégalité : $3\times0 - 2\times0 + 1 = 1 \geqslant 0$. Donc le point O est dans le demi-plan solution. Le demi-plan solution est colorié sur la figure ci-contre: