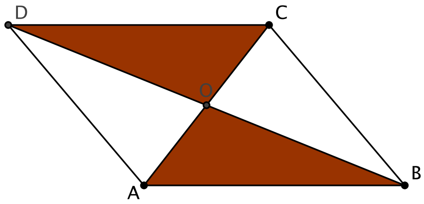
LES TRIANGLES ISOMETRIQUES ET SEMBLABLES

1. Les triangles isométriques

a) Définition: Deux triangles sont isométriques si les longueurs des côtés de l'un sont égales aux longueurs des côtés de l'autre.
Ceci revient à dire qu'il existe une isométrie ou plusieurs isométries qui transforme un triangle en l'autre.
Une isométrie étant une transformation du plan qui conserve les longueurs.
Les isométries étudiées au collège sont la translation, la symétrie axiale, la symétrie centrale, la rotation.

b) Propriétés des triangles isométriques :

- Deux triangles isométriques ont leurs angles deux à deux de même mesure.
- Si deux triangles ont deux côtés de même longueur et l'angle adjacent à ces côtés de même mesure, alors ils sont isométriques.
- Si deux triangles ont un côté de même longueur et les angles adjacents à ce côté de même mesure, alors ils sont isométriques.



c) Exemples: 1. Dans un parallélogramme ABCD de centre O, les triangles ABC et ACD sont isométriques. Les triangles ABO et CDO sont isométriques.
2. Dans un triangle ABC isocèle en A, avec I milieu de [BC], les triangles ABI et ACI sont isométriques.
Les démonstrations sont laissées au lecteur.

2. Les triangles semblables

a) Définition: Deux triangles sont semblables si les angles de l'un ont mêmes mesures que les angles de l'autre.
On les appelle aussi des triangles de même forme.

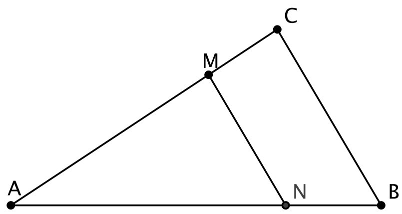
b) Propriétés:

- Si deux angles d'un triangle ont mêmes mesures que deux angles d'un autre triangle, alors ils sont semblables.
- Si deux triangles sont isométriques, alors ils sont semblables.

Attention: la réciproque de cette dernière propriété est fausse.

- Deux triangles équilatéraux sont toujours semblables.
- Deux triangles rectangles et isocèles sont toujours semblables.
- Deux triangles rectangles ayant un angle aigu de même mesure sont semblables.
- Les longueurs des côtés de deux triangles semblables sont proportionnelles. Si le coefficient de proportionnalité est k alors le rapport des aires de ces deux triangles est égal à k^2. Ce nombre k est le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Les démonstrations sont laissées au lecteur.

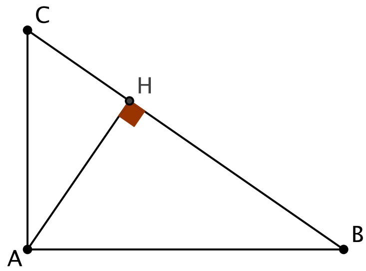


c) Exemples: 1. ABC est un triangle, M est sur la droite (AC) et N est sur la droite (AB) tels que (MN) est parallèle à (BC) (situation de Thalès), alors les triangles ABC et AMN sont semblables.

Et si $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN} = k$ alors $\frac{aire(ABC)}{aire(AMN)} = k^2$.

En effet, les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ACB}$ sont correspondants donc de même mesure, ainsi que les angles $\widehat{ANM}$ et $\widehat{ABC}$. Les hauteurs [MH] issue de M dans AMN et [CK] issue de C dans ABC sont proportionnelles avec le même coefficient k, donc l'aire de ABC est égale à $\frac{AB \times CK}{2} = \frac{k\,AN \times k\,MH}{2} = k^2$ aire(AMN).

2. ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A sur [BC]. Alors les triangles ABC, ABH, ACH sont semblables.



En effet, les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{CAH}$ sont tous les deux complémentaires de l'angle $\widehat{ACH}$, donc ils sont de même mesure; de même, les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{BAH}$ sont tous les deux complémentaires de l'angle $\widehat{ABH}$, donc ils sont de même mesure.

On a donc pour les triangles ABC et ABH, $\dfrac{AB}{BH} = \dfrac{AC}{AH} = \dfrac{BC}{AB}$.

Et pour les triangles ABC et ACH, $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AC}{CH} = \dfrac{BC}{AC}$.

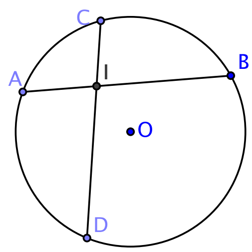
Et pour les triangles ABH et ACH, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{BH}{AH}$.

On en tire les relations $AB^2 = BH \times BC$, $AC^2 = CH \times BC$, $AH^2 = BH \times CH$.

c) Exercices: 1. Le triangle ABC est isocèle en A et l'angle $\widehat{BAC} = 36°$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté [AC] en D. Montrer que les triangles ABC et BCD sont semblables.
Ces triangles s'appellent des triangles d'or.

2. ABCD est un parallélogramme; les points P et Q sont sur la droite (AC) tels que AP = CQ. Montrer que DPBQ est un parallélogramme.

3. On considère un cercle de centre O et [AB] et [CD] deux cordes de ce cercle sécantes en I.
a) Montrer que les triangles IAC et IBD sont semblables.
b) Montrer que les triangles IBC et IAD sont semblables. On pourra séparer les cas où I est intérieur au cercle des cas où I est extérieur au cercle.



c) En déduire que $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AC}{BD}$ et que $IA \times IB = IC \times ID$.
d) On considère une droite passant par I et qui coupe le cercle en deux points P et Q. Montrer que $IP \times IQ = IA \times IB = p$. Ce nombre p s'appelle la puissance de I par rapport au cercle.
e) On suppose que I est extérieur au cercle. Soit (d) et (d') les deux tangentes au cercle passant par I et T et T' les points de tangence. Montrer que $IT^2 = IT'^2 = p$.