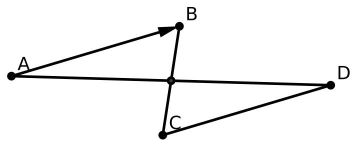
COURS SECONDE LES VECTEURS DU PLAN

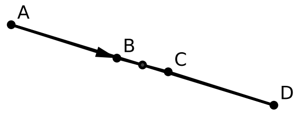
1. Translation :

Définition : Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B est la transformation du plan qui associe à tout point C du plan le point D tel que les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.



On nomme cette transformation, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Égalité de deux vecteurs:



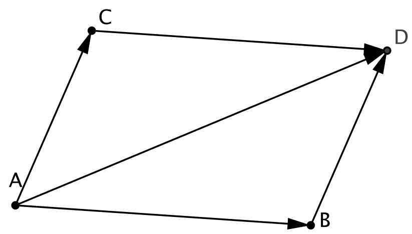
Si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

Propriétés :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux équivaut à : le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

3. Vecteurs particuliers :

Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en A.
Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, noté aussi $-\overrightarrow{AB}$.

4. Somme de deux vecteurs:



La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ défini par :
si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$, alors $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AD}$;
si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ où ABDC est un parallélogramme.
La relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ est appelée la relation de Chasles.
Cette relation est vérifiée pour tous points A, B et D du plan.

Voir animations sur la somme de deux vecteurs:
http://dominique.frin.free.fr/geogebra/vecteurs_seconde.html .

La somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. Et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

5. Coordonnées d'un vecteur :

a) Définition : On considère les points O, I et J du plan non alignés. Ces trois points définissent le repère (O ; I, J) du plan, noté aussi (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
Soit M un point du plan ; et $\vec{u}$ le vecteur tel que l'image du point O par la translation de vecteur $\vec{u}$ est M.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M dans le repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Propriété : On considère les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a, dans le repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), pour coordonnées ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$). On note aussi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
Démonstration : Soit M le point du plan image de O par la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Alors les coordonnées du point M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les segments [AM] et [OB] ont le même milieu N,
avec $x_N = \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_O + x_B}{2}$ et $y_N = \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{y_O + y_B}{2}$; ainsi $x_A + x_M = x_O + x_B$, soit $x_M = x_B - x_A$; de même $y_A + y_M = y_O + y_B$, soit $y_M = y_B - y_A$.

b) Égalité de deux vecteurs: Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

c) Coordonnées de la somme de deux vecteurs : Soient $\vec{u}$ (x; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') deux vecteurs du plan, alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées ($x + x'$; $y + y'$).

d) Multiplication d'un vecteur par un réel : On considère le vecteur $\vec{u}$ (x ; y) non nul et un nombre réel k. Le produit de $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ de coordonnées ((kx ; ky).
*Propriétés***:**
$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$; $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$; $k\vec{u} = 0$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

e) Norme d'un vecteur : Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on appelle norme du vecteur $\vec{u}$ (x ; y) le nombre réel positif $\sqrt{x^2+y^2}$, noté $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$. $\vec{u}$ (x ; y)
Si le repère est orthonormé, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple : On considère les points A(2; 1), B(– 1; 4) et C(4; – 1).
$\overrightarrow{AB}$ (– 3; 3), $\overrightarrow{AC}$ (2; – 2) et $\overrightarrow{BC}$ (5; – 5). Alors AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
AC = $\sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. BC = $\sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

<u>f) Vecteurs colinéaires</u> : Les vecteurs $\vec{u}$ $(x; y)$ et $\vec{v}$ $(x' ; y')$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\ \vec{u}$.
Dans ce cas, les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles, c'est-à-dire que $x' = kx$ et $y' = ky$, soit que le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité, donc $xy' = x'y$ ou $xy' - x'y = 0$.
Le nombre k est appelé <u>coefficient de colinéarité</u> des deux vecteurs.

x	y
x'	y'

***Applications*:**
1. Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, on peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemples : 1. On considère les points A(2; 1), B(– 1; 4) et C(4; – 1).
$\overrightarrow{AB}$ (– 1 – 2; 4 – 1), soit $\overrightarrow{AB}$ (– 3; 3) et $\overrightarrow{AC}$ (4 – 2; – 1 – 1), soit $\overrightarrow{AC}$ (2; – 2) .
$x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = -3\times(-2) - (-2)\times 3 = -6 + 6 = 0$; donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.
2. On considère les points A(1; 1), B(– 4; – 3), C(5; 7) et D(– 6; – 2) .
$\overrightarrow{AB}$ (– 4 – 1; – 3 – 1), soit $\overrightarrow{AB}$ (– 5; – 4) et $\overrightarrow{CD}$ (– 6 – 5; – 2 – 7), soit $\overrightarrow{CD}$ (– 11; – 9) .
$x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{CD}} - x_{\overrightarrow{CD}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = -5\times(-9) - (-4)\times(-11) = 45 - 44 = 1 \neq 0$; donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

<u>6. Milieu d'un segment:</u>

Soit I le milieu du segment [AB]; alors on a les égalités vectorielles suivantes:

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

<u>7. Equation d'une droite du plan</u>

On considère la droite (AB) dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan. Pour tout point M(x ; y) de la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, donc leurs coordonnées sont proportionnelles, soit
$(x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A) = 0$.
On obtient alors une relation entre les coordonnées x et y appelée équation de la droite (AB).
Cette équation peut s'écrire sous l'une des deux formes:
- $x = c = x_A$, si la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées;
- $y = mx + p$, si la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Le nombre m est le <u>coefficient directeur</u> de la droite (appelé aussi pente de la droite) et le nombre p est l'<u>ordonnée à l'origine</u>.

<u>Exemples</u> : 1. On considère les points A(2; 1) et B(– 1; 4). Déterminons l'équation de la droite (AB):
On considère un point M(x; y) de la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{AB}$ (– 1 – 2; 4 – 1) soit $\overrightarrow{AB}$ (– 3; 3) et $\overrightarrow{AM}$ (x – 2; y – 1), donc leurs coordonnées sont proportionnelles, soit $-3(y - 1) - 3(x - 2) = 0$, on simplifie:
$-3y + 3 - 3x + 6 = 0$, soit $-3y = 3x - 9$, soit $y = -x + 3$.
L'équation de la droite (AB) est $y = -x + 3$.
Le coefficient directeur de la droite (AB) est – 1 et l'ordonnée à l'origine est 3.
2. On considère les points A(2; 1) et C(2; 4). Comme $x_A = x_C$, l'équation de la droite (AC) est $x = 2$.