EXERCICE 1

A = $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ = 1 + $\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ – 1 = 2 $\sqrt{2}$, car $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ = $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ = $\sqrt{2}$ – 1 > 0;

B = $(1+\frac{\sqrt{2}}{3})^2-(1-\frac{\sqrt{2}}{3})^2$ = 1 + 2 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ + $\frac{2}{9}$ – (1 – 2 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ + $\frac{2}{9}$) = 4 $\frac{\sqrt{2}}{3}$;

C = $\frac{6^3\times 2^4\times 5^4}{8\times 5^3\times 3^4}$ = $\frac{2^3\times 3^3\times 2^4\times 5^4}{2^3\times 5^3\times 3^4}$ = $\frac{2^4\times 5}{3}$ = $\frac{80}{3}$.

EXERCICE 2

D = $\frac{a^{-2}b^4c^{-1}}{c\,b^3a^4}\times\frac{a^3}{b^{-3}c^4}$ = $\frac{a^{-2}b^4c^{-1}a^3}{c\,b^3a^4b^{-3}c^4}$ = $a^{-3}b^4c^{-6}$. E = $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{-1}\times\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{-2}$ = $\frac{bc}{a^2}\times\left(\frac{ac}{b^2}\right)^2$ = $\frac{bc\,a^2c^2}{a^2b^4}$ = $\frac{c^3}{b^3}$.

Lorsque a = 10, b = 2 et c = – 1, D = $10^{-3}\times 2^4\times(-1)^{-6}$ = 0,016; et E = $\frac{(-1)^3}{2^3}$ = $\frac{-1}{8}$.

EXERCICE 3

Nombres **parfaits** inférieurs à 30 : **6** = 1 + 2 + 3 et **28** = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Nombres **abondants** inférieurs à 30 : **12** < 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16; **18** < 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21;
20 < 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22; **24** < 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36; **30** < 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42.

Nombres **déficients** inférieurs à 30 : tous les autres.

EXERCICE 4

a) $a=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $b=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$: On effectue le produit en croix : $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$ et 1 × 3 $\sqrt{3}$:
(on utilise l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$) : $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$ = $(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2$ = 8 – 3 = 5 ,
et 5 < 3 $\sqrt{3}$, donc $a < b$.

$a=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ et $b=(2\sqrt{3}-\sqrt{7})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})$: Pour comparer ces deux nombres on développe b en utilisant la même identité remarquable qu'à la question précédente : $b=(2\sqrt{3}-\sqrt{7})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})$ = $(2\sqrt{3})^2$ – $(\sqrt{7})^2$ = 12 – 7 = 5.
On compare ensuite a^2 et b^2 : Pour a^2 , on utilise l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, soit:
$a^2=(\sqrt{3+\sqrt{5}})^2+2\sqrt{3-\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{5}}+(\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$ = 3 + $\sqrt{5}$ + 2 $\sqrt{9-5}$ + 3 – $\sqrt{5}$ = 6 + 4 = 10; $b^2 = 5^2$ = 25,
donc $a^2 < b^2$ et ainsi $a < b$.

$a=\frac{1}{17}$ et $b=0{,}058823529$: La calculatrice donne $a=\frac{1}{17}$ ≃ 0,058823529, mais en posant la division de 1 par 17 on trouve un quotient de 0,058823529411... donc $a > b$. En fait, b est une valeur approchée de a par défaut à 10^{-9} près, c'est-à-dire au milliardième.

b) Sachant que 0 < a < b, on compare les expressions: $\frac{a^2+1}{a}$ et 2; $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ et 2:

On compare la différence des deux nombres à 0 : $\frac{a^2+1}{a}$ – 2 = $\frac{a^2+1-2a}{a}$ = $\frac{(a-1)^2}{a}$ et comme a > 0 et un carré est toujours positif, donc $\frac{(a-1)^2}{a}$ ⩾ 0, ainsi $\frac{a^2+1}{a}$ ⩾ 2 . L'égalité n'intervient que pour a = 1.

On compare la différence des deux nombres à 0 : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ – 2 = $\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}$ = $\frac{(a-b)^2}{ab}$ et comme a et b sont strictement positifs et un carré est toujours positif, donc $\frac{(a-b)^2}{ab}$ ⩾ 0, ainsi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ⩾ 2 .
L'égalité intervient pour $a = b$.