CORRECTION **DEVOIR MAISON N° 3** **SECONDE 16**

EXERCICE 1: Algorithme de Babylone : On considère le nombre réel strictement positif a :

(1) Son inverse est $\frac{1}{a}$; (2) multiplier cet inverse par 2 donne $\frac{2}{a}$; (3) ajouter le résultat obtenu au nombre de départ donne $a+\frac{2}{a}$; (4) diviser le résultat par 2 donne $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$.

a) Appliquons ce programme au nombre 2 : (1) donne $\frac{1}{2}$; (2) donne 1; (3) donne 3 et (4) donne $\frac{3}{2}$.

b) Appliquons ce programme au nombre 0,5 : (1) donne 2; (2) donne 4; (3) donne 4,5 et (4) donne 2,25 = $\frac{9}{4}$.

c) Appliquons ce programme au nombre 100 : (1) donne 0,01; (2) donne 0,02; (3) donne 100,02 et (4) donne 50,01.

d) Sur la calculatrice, le calcul effectué est $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$.

f) En appuyant sur la touche EXE ou ENTER , cinq fois de suite, on obtient : 2; 1; 1,5; $\frac{17}{12} \simeq 1{,}4166$; $\frac{577}{408} \simeq 1{,}414215$; $\frac{665857}{470832} \simeq 1{,}41421356$.

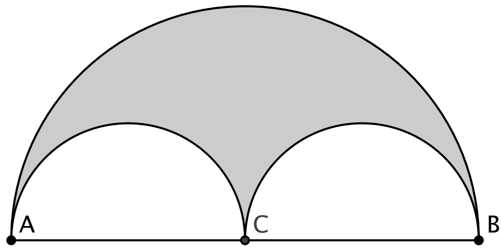
g) La calculatrice donne $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135624$, donc les valeurs obtenues sont très proches de $\sqrt{2}$.

h) La dernière valeur obtenue $\frac{665857}{470832}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-12} près !

i) On peut écrire $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right) = \frac{a^2+2}{2a}$. Comparons $\frac{a^2+2}{2a}$ et $\sqrt{2}$ en comparant leur différence à 0:

$\frac{a^2+2}{2a} - \sqrt{2} = \frac{a^2+2-2\sqrt{2}a}{2a} = \frac{(a-\sqrt{2})^2}{2a}$. Le numérateur est un carré donc positif, et le dénominateur est strictement positif car $a > 0$, donc $\frac{a^2+2}{2a} - \sqrt{2} \geqslant 0$, et donc $\frac{a^2+2}{2a} \geqslant \sqrt{2}$. Ainsi, pour tout $a > 0$, $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right) \geqslant \sqrt{2}$.

EXERCICE 2:



L'aire de la partie grisée est égale à l'aire du demi-disque de diamètre [AB] moins les aires des deux demi-disques de diamètre [AC] et [BC]. Le point C étant le milieu de [AB], ces deux demi-disques ont la même aire. L'aire d'un disque de rayon r est égale à πr^2 ;
l'aire du demi-disque de diamètre [AB] est égale à

$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\text{AB}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{\text{AB}^2}{4} = \pi\frac{\text{AB}^2}{8}$.

Ainsi, l'aire grisée est égale à $\pi\frac{\text{AB}^2}{8} - 2\pi\frac{\text{AC}^2}{8} = \frac{\pi}{8}(\text{AB}^2-2\,\text{AC}^2) = \frac{\pi}{8}\left(\text{AB}^2-2\left(\frac{\text{AB}}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{8}\left(\text{AB}^2-\frac{\text{AB}^2}{2}\right) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\text{AB}^2}{2}\right) = \frac{\pi}{16}\text{AB}^2$.

Comme $3{,}9 < \text{AB} < 4{,}1$ on trouve $1{,}95 < \text{AC} < 2{,}05$ puis $3{,}9^2 < \text{AB}^2 < 4{,}1^2$ soit $15{,}21 < \text{AB}^2 < 16{,}81$.

Comme $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ on trouve $0{,}19625 < \frac{\pi}{16} < 0{,}196875$ donc $2{,}9849625 < \frac{\pi}{16}\text{AB}^2 < 3{,}3095$ qui est l'encadrement de l'aire de la partie grisée.

On remarque que l'aire grisée est égale à l'aire des deux demi-disques de diamètre [AC] et [CB].