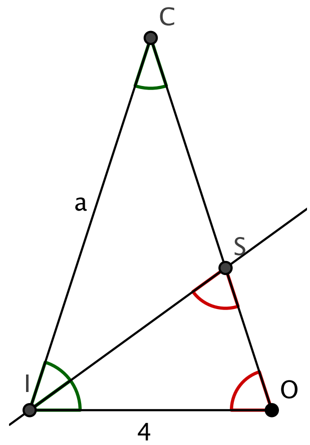
CORRIGE DEVOIR MAISON N° 4 SECONDE 16

EXERCICE 1



1. et 2. Constructions :

3. La bissectrice de l'angle $\widehat{CIO}$ est la droite (SI), donc $\widehat{SIO} = 36°$. Le triangle ICO est isocèle en C,
donc $\widehat{COI} = 72°$, et $\widehat{ICO} = 180° - (\widehat{CIO} + \widehat{ICO}) = 36°$. Ainsi $\widehat{SIO} = \widehat{ICO} = 36°$ et $\widehat{COI} = \widehat{SOI} = 72°$, donc les triangles ICO et ISO sont semblables.

4. a) Le triangle CSI est isocèle en S car $\widehat{SIC} = \widehat{ICS} = 36°$, donc SI = CS = IO = 4.
Donc SO = CO – CS = $a - 4$.
Les triangles ICO et ISO étant semblables, les longueurs des côtés de ces triangles sont proportionnelles : $\frac{SO}{IO} = \frac{SI}{CI}$. Donc $\frac{a-4}{4} = \frac{4}{a}$.

b) En faisant le produit en croix, il vient $a(a-4) = 4\times4$, d'où $a^2 - 4a = 16$,
soit $a^2 - 4a - 16 = 0$.

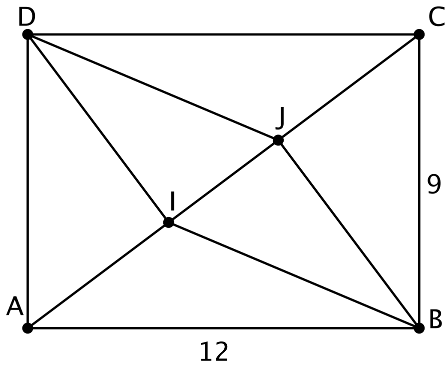
c) On développe $(a - 2 + 2\sqrt{5})(a - 2 - 2\sqrt{5}) = (a-2)^2 - (2\sqrt{5})^2$ en utilisant l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$, d'où $(a - 2 + 2\sqrt{5})(a - 2 - 2\sqrt{5}) = a^2 - 4a + 4 - 4\times5 = a^2 - 4a - 16$.

d) La longueur CI = a. D'après la question précédente, et la propriété : un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul: $a - 2 + 2\sqrt{5} = 0$ ou $a - 2 - 2\sqrt{5} = 0$, soit $a = 2 - 2\sqrt{5}$ ou $a = 2 + 2\sqrt{5}$. Comme la première valeur $2 - 2\sqrt{5}$ est négative, la seule solution possible est $a = 2 + 2\sqrt{5}$ = CI.

5. Le coefficient de proportionnalité entre les longueurs est $\frac{CI}{SI} = \frac{a}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Le quotient des aires des triangles CIO et SIO est égal au carré du coefficient de proportionnalité, donc est égal à
$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 2



1. et 2. Constructions:

2. Construire les points I et J, pieds respectifs des hauteurs des triangles ADC et ABC issues des sommets D et B.

3. Les triangles semblables dans cette figure sont: AID, IDC, ADC, ABC, IBC, ABJ.

4. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 = 15^2$. Donc AC = 15.

5. Les triangles ABJ et ABC étant semblables, les longueurs des côtés de ces triangles sont proportionnelles :
$\frac{AJ}{AB} = \frac{AB}{AC}$, d'où AJ = $\frac{AB^2}{AC} = \frac{12^2}{15} = 9{,}6$. $\frac{BJ}{BC} = \frac{AB}{AC}$, d'où BJ = $\frac{AB\times BC}{AC} = \frac{12\times9}{15} = 7{,}2$.
$\frac{JC}{BC} = \frac{BC}{AC}$, d'où JC = $\frac{BC^2}{AC} = \frac{9^2}{15} = 5{,}4$.
Les triangles ADI et BJC sont isométriques, car AD = BC, $\widehat{AID} = \widehat{BJC} = 90°$, et $\widehat{DAI} = \widehat{BCJ}$ (angles alternes internes). Ainsi, AI = JC et IJ = AC – 2JC = 15 – 2×5,4 = 4,2.

6. Les droites (DI) et (JB) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à une même droite (AC); et DI = JB, donc BIDJ a deux côtés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme.

7. Le parallélogramme BIDJ est constitué de deux triangles rectangles DIJ et BIJ isométriques car DI = BJ, IJ = IJ et $\widehat{DIJ} = \widehat{BJI}$. Donc l'aire du parallélogramme BIDJ est égale à 2×aire(BIJ) = $2\,\frac{IJ\times JB}{2} = IJ\times JB = 4{,}2\times7{,}2 = 30{,}24$.