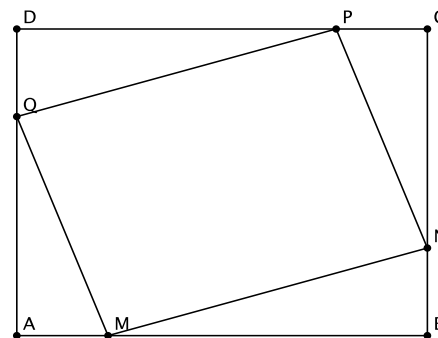


1. a) Construction du rectangle ABCD tel que $AB = 9$ cm et $BC = 7$ cm et les points M, N, P, Q respectivement sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que $AM = BN = CP = DQ = 2$ cm.



b) Les triangles AQM et PCN sont isométriques, car $AM = PC = 2$, $AQ = CN = 7 - 2 = 5$ et $\widehat{QAM} = \widehat{PCN} = 90^\circ$. Donc $QM = PN$.
Les triangles BMN et DPQ sont isométriques, car $BN = DQ = 2$, $BM = DP = 9 - 2 = 7$ et $\widehat{NBM} = \widehat{QDP} = 90^\circ$. Donc $MN = PQ$.
Donc le quadrilatère MNPQ a ses côtés opposés de même longueur, donc c'est un parallélogramme.

c) L'aire de MNPQ est égale à l'aire de ABCD – l'aire des triangles AQM, BMN, CPN et QDP.

$$\text{L'aire de AQM} = \text{aire de PCN} = \frac{2 \times 5}{2} = 5. \text{ L'aire de BMN} = \text{aire de QDP} = \frac{2 \times 7}{2} = 7.$$

$$\text{Ainsi aire(MNPQ)} = 7 \times 9 - 2 \times 7 - 2 \times 5 = 39 \text{ cm}^2.$$

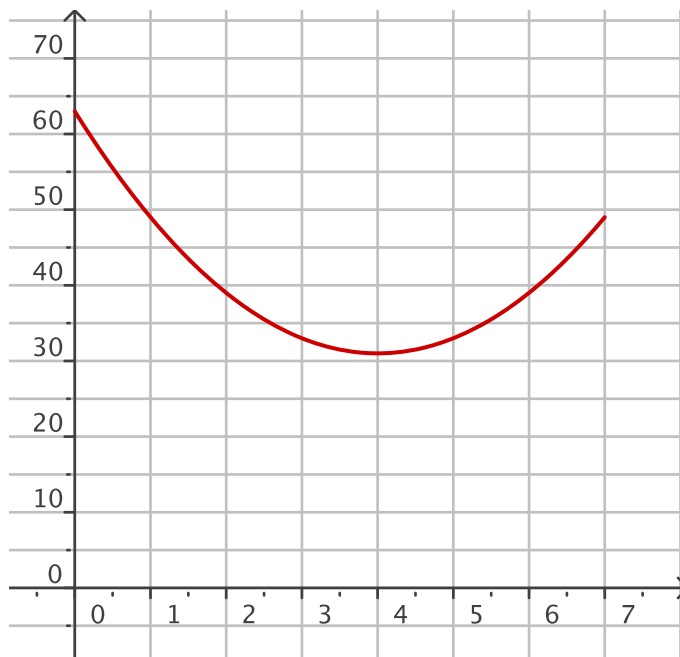
2. a) L'aire $S(x)$ est égale à l'aire de ABCD – l'aire des triangles AQM, BMN, CPN et QDP, soit

$$S(x) = 63 - 2 \times \frac{x(7-x)}{2} - 2 \times \frac{x(9-x)}{2} = 63 - x(7-x) - x(9-x) = 63 - 7x - 9x + 2x^2 = 2x^2 - 16x + 63.$$

b) Tableau de valeurs de la fonction S sur l'intervalle [0; 7] :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
S(x)	63	49	39	33	31	33	39	49

Représentation graphique de la fonction S sur l'intervalle [0; 7].



c) Le tableau de variations de S.

x	0	4	7
S(x)	63	31	49

La fonction S est croissante sur l'intervalle [0; 4] et décroissante sur l'intervalle [4; 7].

d) On conjecture que le minimum de la fonction S est 31 atteint pour $x = 4$; le maximum de la fonction S est 63 atteint pour $x = 0$.

$$3. a) \text{ On a } 2(x-4)^2 + 31 = 2(x^2 - 8x + 16) + 31 = 2x^2 - 16x + 32 + 31 = 2x^2 - 16x + 63 = S(x).$$

b) Un carré étant toujours positif, $(x-4)^2 \geq 0$, donc $2(x-4)^2 \geq 0$, donc $2(x-4)^2 + 31 \geq 31$, soit $S(x) \geq 31$, et ainsi le minimum de la fonction S est bien 31; il est atteint lorsque $2(x-4)^2 = 0$, soit $x = 4$.