Exercice 1

$A=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\ \frac{2}{5}=\frac{2}{3}-\frac{2}{20}=\frac{40}{60}-\frac{6}{60}=\frac{34}{60}=\frac{17}{30}$ donc A est un nombre rationnel $A\in\mathbb{Q}$

$B=2^{-2}+2^{-3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{2}{2^3}+\frac{1}{2^3}=\frac{3}{2^3}=0{,}375$ donc B est un nombre décimal $B\in\mathbb{D}$

$C=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2=9\times2-12\sqrt{6}+4\times3=30-12\sqrt{3}$.

C est un nombre irrationnel et $C\in\mathbb{R}$

$D=(4\sqrt{2}-3)(4\sqrt{2}+3)=(4\sqrt{2})^2-9=16\times2-9=23$ donc D est un entier naturel $D\in\mathbb{N}$

Exercice 2

1) a)

$\frac{3x-2}{2}-\frac{5+x}{3}=4$

$\frac{9x-6}{6}-\frac{10+2x}{6}=\frac{24}{6}$

$9x-6-(10+2x)=24$

$9x-6-10-2x=24$

$7x-16=24$

$7x=24+16$

$x=\frac{40}{7}$

$S=\ \frac{40}{7}$

b)

$|x-8|=3$

$x-8=-3$ *ou* $x-8=3$

$x=-3+8$ $\quad$ $x=3+8$

$x=5$ $\quad$ $x=11$

$S=\{5;11\}$

2)

$\begin{cases}3x-5\leq8\\-2x+7<4\end{cases}$

$3x-5\leqslant8$

$3x\leqslant8+5$

$x\leqslant\frac{13}{3}$

donc $S_1=\left]-\infty\,;\frac{13}{3}\right]$

$-2x+7<4$

$-2x<4-7$

$-2x<-3$

$x>\frac{3}{2}$

donc $S_2=\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

$S=S_1\cap S_2=\left]\frac{3}{2}\,;\frac{13}{3}\right]$

Exercice 3

1)

$0<x<1$

$0>-x>-1$

$1>1-x>1-1$

$1>1-x>0$

$0<1-x<1$

$0<A<1$

2) A un réel positif inférieur à 1 donc $A^3<A^2<A$

3) $A-E=1-x-\frac{1}{1-x}=\frac{(1-x)^2-1}{1-x}=\frac{1-2x+x^2-1}{1-x}=\frac{x^2-2x}{1-x}=\frac{x(x-2)}{1-x}$

$0<x<1$

$-2<x-2<1-2$

$-2<x-2<-1$

On peut alors écrire que $0<x$, $x-2<0$, $1-x>0$ donc $A-E<0$, $A<E$

Exercice 4

1) $A=1260=2^2\times3^2\times5\times7$

$B=2250=2\times3^2\times5^3$

2) $\frac{A}{B}=\frac{2^2\times3^2\times5\times7}{2\times3^2\times5^3}=\frac{2\times7}{5^2}=\frac{14}{25}$

3) $\sqrt{A}\times\sqrt{B}=\sqrt{2^2\times3^2\times5\times7\times2\times3^2\times5^3}=2\times3^2\times5\times5\sqrt{2\times7}=450\sqrt{14}$.

Exercice 5

1) Développement

$$A = (3x+8)^2 - (3x+8)(2x-5)$$
$$A = (3x+8)^2 - (3x+8)(2x-5)$$
$$A = 9x^2 + 48x + 64 - (6x^2 - 15x + 16x - 40)$$
$$A = 9x^2 + 48x + 64 - 6x^2 + 15x - 16x + 40$$
$$A = 3x^2 + 47x + 104$$

2) Factorisation

$$A = (3x+8)^2 - (3x+8)(2x-5)$$
$$A = (3x+8)(3x+8-(2x-5))$$
$$A = (3x+8)(3x+8-2x+5)$$
$$A = (3x+8)(x+13)$$

Exercice 6

1) MB = MD donc M est équidistant des extrémités du segment [BD] donc M est sur la médiatrice de [BD].
Donc pour obtenir M, on trace la médiatrice de [BD] à l'aide du compas et M sera le point d'intersection de cette médiatrice avec le segment [AC].

2) Dans le triangle MAB rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :
MB² = MA² + AB² donc MB² = $x^2 + 3^2$ et MB² = $x^2 + 9$.
Dans le triangle MCD rectangle en C, on applique le théorème de Pythagore :
MD² = MC² + CD² . Or, on a posé AM = x donc MC = AC – AM = 5 – x.
D'où MD² = (5 – x)² + 4²   MD² = (5 – x)² + 16.

On sait que MB = MD c'est-à-dire MB² = MD². On en déduit que
$x^2 + 9 = (5 - x)^2 + 16$.
On résout maintenant cette équation
$x^2 + 9 = 25 - 10x + x^2 + 16$.   les x^2 s'éliminent
$9 = 41 - 10x$ soit $10x = 32$ $x = 3{,}2$.
Le point M répondant à la question est sur le segment [AC]avec AM = 3,2.

Exercice 7

1) Les triangles AOM et BOM ont le côté [OM] en commun. De plus OA = OB car ce sont 2 rayons du cercle.
(OA) et (OB) sont les tangentes au cercle issues de M donc, puisque la tangente est perpendiculaire au rayon au point de contact, les triangles AOM et BOM sont rectangles respectivement en A et B.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ces triangles ce qui donne OM² = OA² +AM² et
OM² =OB² + BM².
Or, OA = OB donc AM² = BM² donc AM = BM.
Finalement les triangles AOM et BOM ont leurs 3 côtés isométriques 2 à 2 ([OM] commun, OA = OB et AM = BM) donc ces deux triangles sont isométriques.

2) Dans la symétrie par rapport à la droite (AB) le point A a pour image le point A (car c'est un point de l'axe) et le point O a pour image le point H (d'après l'énoncé).
Or, une symétrie axiale conserve les distances donc AO = AH .
De même, le point O a pour image le point H et le point B a pour image le point B donc OB = HB.
De plus OA = OB. On a donc OA = AH = OB = HB.
Donc le quadrilatère OAHB a ses 4 côtés de même longueur, c'est donc un losange.

3) OAHB étant un losange, les droites (AH) et (OB) sont parallèles. Or, (OB) est perpendiculaire à (BM).
Si 2 droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
On en déduit que les droites (AH) et (BM) sont perpendiculaires et donc que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABM.
De même, OAHB étant un losange, les droites (BH) et (OA) sont parallèles. Or, (OA) est perpendiculaire à (AM) donc (BH) est perpendiculaire à (AM) donc (AM) est la hauteur issue de A dans le triangle ABM.
H est le point de concours de 2 hauteurs du triangle ABM, c'est donc l'orthocentre de ce triangle.
Remarque : on ne sait pas que le point H est sur la droite (OM) donc si on veut l'utiliser, il faut le démontrer.