CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 10 SECONDE Avril 2008

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

1. Pour tout réel x, $2(x-3)^2 - 8 = 2(x^2 - 6x + 9) - 8 = 2x^2 - 12x + 10 = f(x)$.

Et $-(x-1)^2 + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 3 = -x^2 + 2x - 1 + 3 = -x^2 + 2x + 2 = g(x)$.

2. Variations de f : On considère deux réels a et b dans l'intervalle $]-\infty\,;3]$ tels que $a < b \leqslant 3$.
Alors, on soustrait 3: $a - 3 < b - 3 \leqslant 0$;
on élève au carré des nombres négatifs (et la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;0]$: $(a-3)^2 > (b-3)^2 \geqslant 0$;
on multiplie par 2 : $2(a-3)^2 > 2(b-3)^2 \geqslant 0$;
on soustrait 8 : $2(a-3)^2 - 8 > 2(b-3)^2 - 8 \geqslant -8$;
donc $f(a) > f(b) \geqslant -8$; l'ordre est inversé, donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;3]$.

On considère deux réels a et b dans l'intervalle $[3; +\infty[$ tels que $3 \leqslant a < b$.
Alors, on soustrait 3: $0 \leqslant a - 3 < b - 3$;
on élève au carré des nombres positifs (et la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$: $0 \leqslant (a-3)^2 < (b-3)^2$;
on multiplie par 2 : $0 \leqslant 2(a-3)^2 < 2(b-3)^2$;
on soustrait 8 : $-8 \leqslant 2(a-3)^2 - 8 < 2(b-3)^2 - 8$;
donc $-8 \leqslant f(a) < f(b)$; l'ordre est conservé, donc la fonction f est croissante sur $[3; +\infty[$.

Variations de g : On considère deux réels a et b dans l'intervalle $]-\infty\,;1]$ tels que $a < b \leqslant 1$.
Alors, on soustrait 1: $a - 1 < b - 1 \leqslant 0$;
on élève au carré des nombres négatifs (et la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;0]$: $(a-1)^2 > (b-1)^2 \geqslant 0$;
on multiplie par -1(nombre négatif, donc l'ordre change): $-(a-1)^2 < -(b-1)^2 \leqslant 0$;
on ajoute 3 : $-(a-1)^2 + 3 < -(b-1)^2 + 3 \leqslant 3$;
donc $g(a) < g(b) \leqslant 3$; l'ordre est conservé, donc la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;1]$.

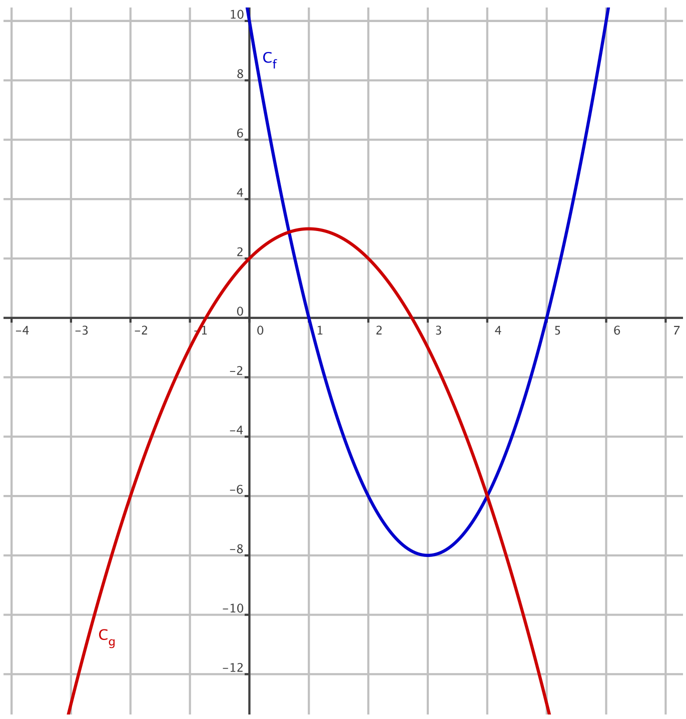
On considère deux réels a et b dans l'intervalle $[1; +\infty[$ tels que $1 \leqslant a < b$.
Alors, on soustrait 1: $0 \leqslant a - 1 < b - 1$;
on élève au carré des nombres positifs (et la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$: $0 \leqslant (a-1)^2 < (b-1)^2$;
on multiplie par -1 : $0 \geqslant -(a-1)^2 > -(b-1)^2$;
on ajoute 3 : $3 \geqslant -(a-1)^2 + 3 > -(b-1)^2 + 3$;
donc $3 \geqslant g(a) > g(b)$; l'ordre est inversé, donc la fonction g est décroissante sur $[1; +\infty[$.

3. Les tableaux de variations de f et de g :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

4. Les représentations graphiques des deux fonctions sur l'intervalle $[-4; 7]$ dans le même repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unités graphiques : $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm.



5. Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on utilise l'expression $2(x-3)^2 - 8 = 0$, on divise par 2 : $(x-3)^2 - 4 = 0$, on factorise $(x - 3 + 2)(x - 3 - 2) = 0$, soit $(x-1)(x-5) = 0$. Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul : $x - 1 = 0$ donne $x = 1$ et $x - 5 = 0$ donne $x = 5$. L'ensemble solution est S = {1; 5}. On retrouve graphiquement ces solutions comme abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

6. a) L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente $2x^2 - 12x + 10 = -x^2 + 2x + 2$, qui est équivalente à $3x^2 - 14x + 8 = 0$.

b) Pour tout réel x, $3[(x - \frac{7}{3})^2 - \frac{25}{9}] = 3[x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{49}{9} - \frac{25}{9}] = 3[x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{24}{9}] = 3x^2 - 14x + 8$.

c) Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, on résout l'équation $3x^2 - 14x + 8 = 0$ qui est équivalente à l'équation $3[(x - \frac{7}{3})^2 - \frac{25}{9}] = 0$. On divise par 3 : $(x - \frac{7}{3})^2 - \frac{25}{9} = 0$, équivaut à $(x - \frac{7}{3})^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 0$;

on factorise : $(x - \frac{7}{3} - \frac{5}{3})(x - \frac{7}{3} + \frac{5}{3}) = 0$, soit $(x-4)(x - \frac{2}{3}) = 0$. Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul : $x - 4 = 0$ donne $x = 4$ et $x - \frac{2}{3} = 0$ donne $x = \frac{2}{3}$. L'ensemble solution est S = $\{4; \frac{2}{3}\}$. On retrouve graphiquement ces solutions comme abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

d) Les solutions trouvées sur le graphique de la question 4 sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

e) Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$, on utilise les questions précédentes :

$f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $2x^2 - 12x + 10 \leqslant -x^2 + 2x + 2$ équivaut à $3x^2 - 14x + 8 \leqslant 0$ équivaut à $3[(x - \frac{7}{3})^2 - \frac{25}{9}] \leqslant 0$ équivaut à $(x-4)(x - \frac{2}{3}) \leqslant 0$. On réalise un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - \frac{2}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

La solution est donc l'intervalle $[\frac{2}{3}\,;4]$.

On retrouve ce résultat sur le graphique : ce sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessous de la courbe C_g.