

EXERCICE 1 :

Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; 3)$, $B(-5; -1)$ et $C(3; -7)$.

1. Soit $M(x; y)$ un point de la droite (d). Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires;

$$\overrightarrow{AB}(-3; -4) \text{ et } \overrightarrow{CM}(x-3; y+7); \text{ donc } -3(y+7) = -4(x-3), \text{ soit } y+7 = \frac{4}{3}(x-3), \text{ soit } y = \frac{4}{3}x - 11.$$

2. Soit $N(x; y)$ un point de la droite (d'). Alors les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires;

$$\overrightarrow{BC}(8; -6) \text{ et } \overrightarrow{AN}(x+2; y-3); \text{ donc } 8(y-3) = -6(x+2), \text{ soit } y-3 = \frac{-6}{8}(x+2), \text{ soit } y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}.$$

3. Les coordonnées du point D, point d'intersection de (d) et (d') vérifient les deux équations :

$$y = \frac{4}{3}x - 11 \text{ et } y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}. \text{ Soit } \frac{4}{3}x - 11 = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}, \text{ d'où } \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = \frac{3}{2} + 11,$$

$$\text{soit } \frac{16}{12}x + \frac{9}{12}x = \frac{25}{2}, \text{ soit } \frac{25}{12}x = \frac{25}{2}, \text{ soit } x = \frac{25}{2} \times \frac{12}{25} = 6. \text{ Et } y = \frac{4}{3} \times 6 - 11 = -3. \text{ Donc } D(6; -3).$$

$$4. AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3+2)^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3+5)^2 + (-7+1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

5. On remarque que $AB^2 + BC^2 = 25 + 100 = 125 = AC^2$. Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

6. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ainsi que les droites (BC) et (AD), donc ABCD est un parallélogramme. De plus, l'angle ABC est droit, donc ABCD est un rectangle.

7. Le centre E du rectangle ABCD est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

$$\text{Donc } x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3-7}{2} = -2. \text{ E}(\frac{1}{2}; -2).$$

8. AE BF est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EA}$.

$$\text{Donc } x_F - x_B = x_A - x_E = \frac{-5}{2}, \text{ d'où } x_F = \frac{-5}{2} - 5 = \frac{-15}{2}, \text{ et } y_F - y_B = y_A - y_E = 5, \text{ d'où } y_F = 5 - 1 = 4. \text{ F}(\frac{-15}{2}; 4).$$

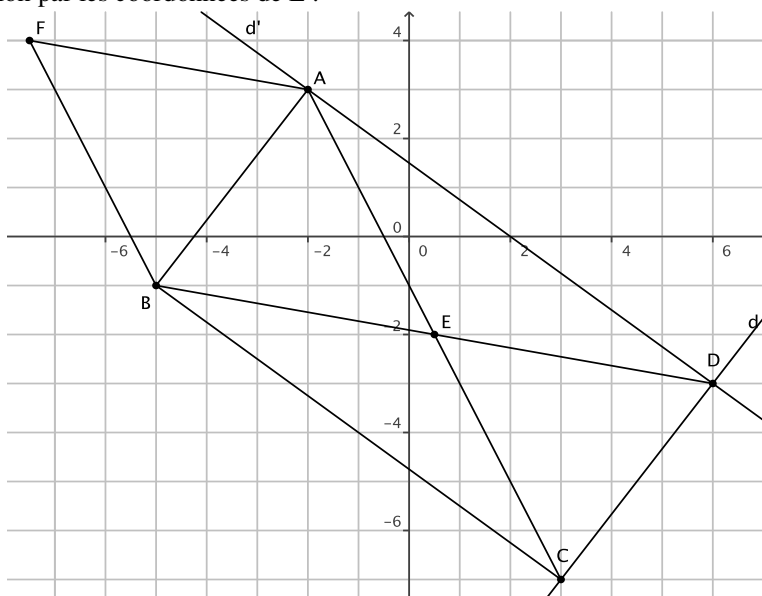
$$9. \text{ Une équation de la droite (EF) est de la forme } y = mx + p \text{ avec } m = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{-2-4}{\frac{1}{2} - \frac{-15}{2}} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}.$$

Pour trouver p , on remplace x et y dans l'équation par les coordonnées de E :

$$-2 = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{2} + p, \text{ soit } -2 = \frac{-3}{8} + p,$$

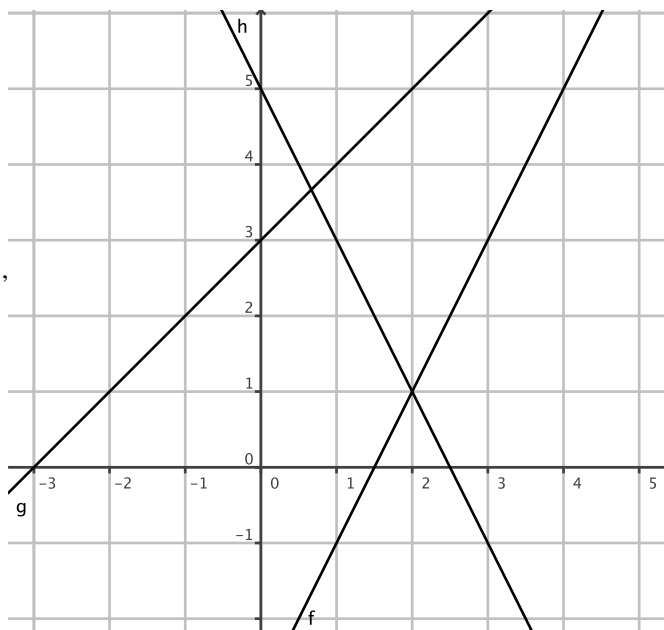
$$\text{soit } p = -2 + \frac{3}{8} = \frac{-13}{8}. \text{ Donc l'équation de}$$

$$\text{la droite (EF) est } y = \frac{-3}{4}x + \frac{-13}{8}.$$



EXERCICE 2 :

1. Représenter graphiquement les trois fonctions affines f , g et h définies par :
 $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x + 3$, $h(x) = 5 - 2x$.



2. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{4x^2-9}{5-2x} \leq 2x-3$,

on compare un terme à 0 : $\frac{4x^2-9}{5-2x} - (2x-3) \leq 0$,

on factorise : $\frac{(2x-3)(2x+3)}{5-2x} - (2x-3) \leq 0$,

on met au même dénominateur :

$$\frac{(2x-3)(2x+3) - (2x-3)(5-2x)}{5-2x} \leq 0,$$

on factorise : $\frac{(2x-3)[(2x+3)-(5-2x)]}{5-2x} \leq 0$,

on simplifie : $\frac{(2x-3)(4x-2)}{5-2x} \leq 0$,

on réalise un tableau de signes :

$$2x - 3 = 0 \text{ pour } x = \frac{3}{2};$$

$$4x - 2 = 0 \text{ pour } x = \frac{1}{2};$$

$5 - 2x = 0$ pour $x = \frac{5}{2}$; qui est une valeur interdite pour le quotient.

Donc la solution de l'inéquation est

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	-	-	0	+	+
$4x - 2$	-	0	+	+	+
$5 - 2x$	+	+	+	0	-
quotient	+	0	-	0	-

$$S = \left[\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right] \cup \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[.$$