EXERCICE 1 :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} = 1,625 \in \mathbf{D}; \quad B = \frac{5 \times 10^3}{7 - 2^5} = \frac{5000}{7 - 32} = \frac{5000}{-25} = -200 \in \mathbf{Z};$$

$$C = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{5} - 1 - 2\sqrt{5} - 5}{4} = -1 \in \mathbf{Z};$$

$$D = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1 \in \mathbf{N}.$$

EXERCICE 2 :

1. La décomposition en facteurs premiers des nombres : $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$; $144 = 2^4 \times 3^2$; $1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$.

2. Le PGCD de 1500 et 600 est égal à $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

3. Le PGCD de 144 et 600 est égal à $2^3 \times 3 = 24$.

EXERCICE 3 :

1. Pour comparer, pour tout entier naturel n non nul, les nombres $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n-1}{n}$, on utilise le produit en croix:

$$n \times n = n^2 \text{ et } (n+1)(n-1) = n^2 - 1. \text{ Or } n^2 < n^2 - 1, \text{ donc } \frac{n}{n+1} < \frac{n-1}{n}.$$

2. On considère les nombres réels a et b strictement positifs.

a) Pour comparer les nombres $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{2ab}{a+b}$, on compare leur différence à 0:

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0 \text{ car un carré est toujours positif et les nombres } a \text{ et } b \text{ sont strictement positifs, donc } 2(a+b) \text{ aussi.}$$

b) Sachant que $a < b$, on a donc $3a < 3b$ (on multiplie les deux membres par 3),

puis $3a - 5 < 3b - 5$ (on soustrait 5 aux deux membres),

$$\text{puis } \frac{3a-5}{7} < \frac{3b-5}{7} \text{ (on divise les deux membres par 7).}$$

EXERCICE 4 :

1. L'intersection et la réunion des intervalles $I = [-2; +\infty[$ et $J =]-\infty; 5[$ est $I \cap J = [-2; 5[$ et $I \cup J =]-\infty; +\infty[$.

2. On considère le système d'inéquations :
$$\begin{cases} 2(x-3) < x-1 \\ 2-3x \leq 6-x \end{cases}$$

a) On résout chaque inéquation :

$$2(x-3) < x-1 \text{ donne } 2x-6 < x-1 \text{ donne } x < 5.$$

$$2-3x \leq 6-x \text{ donne } -2x \leq 6-2 \text{ donne } -2x \leq 4 \text{ donne } x \geq -2.$$

$$\text{La solution : } \begin{cases} x < 5 \\ x \geq -2 \end{cases}.$$

b) Le résultat sous la forme d'un intervalle : $[-2; 5[$.