CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N ° 6 SECONDE 7

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

1. Pour tout réel x, on a $2(x-2)^2 - 3 = 2(x^2 - 4x + 4) - 3 = 2x^2 - 8x + 8 - 3 = 2x^2 - 8x + 5 = f(x)$.

2. Variations de f sur l'intervalle $[2; +\infty[$: on considère deux réels a et b dans $[2; +\infty[$, tels que $2 \leqslant a < b$:
On soustrait 2 : $0 \leqslant a - 2 < b - 2$; on élève au carré des nombres positifs : $0 \leqslant (a-2)^2 < (b-2)^2$;
on multiplie par 2 : $0 \leqslant 2(a-2)^2 < 2(b-2)^2$; on soustrait 3 : $-3 \leqslant 2(a-2)^2 - 3 < 2(b-2)^2 - 3$; donc $f(a) < f(b)$;
l'ordre est conservé, donc la fonction f est croissante sur $[2; +\infty[$.
Variations de f sur $]-\infty ; 2]$: on considère deux réels a et b dans $]-\infty ; 2]$, tels que $a < b \leqslant 2$:
On soustrait 2 : $a - 2 < b - 2 \leqslant 0$; on élève au carré des nombres négatifs : $(a-2)^2 > (b-2)^2 \geqslant 0$;
on multiplie par 2 : $2(a-2)^2 > 2(b-2)^2 \geqslant 0$; on soustrait 3 : $2(a-2)^2 - 3 > 2(b-2)^2 - 3 \geqslant -3$; ; donc $f(a) > f(b)$;
l'ordre est inversé, donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$.

3. Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	↘		-3	↗	

4. L'équation $f(x) = 15$ est équivalente à $2(x-2)^2 - 3 = 15$ équivaut à
$2(x-2)^2 - 18 = 0$ équivaut à $2[(x-2)^2 - 9] = 0$; on factorise :
$2[(x-2) + 3][(x-2) - 3] = 0$; on simplifie : $2(x+1)(x-5) = 0$.
Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul :
$x + 1 = 0$ donne $x = -1$; $x - 5 = 0$ donne $x = 5$.
L'ensemble solution est $S = \{-1; 5\}$

5. L'inéquation $f(x) \leqslant 5$ équivaut à $2x^2 - 8x + 5 \leqslant 5$ équivaut à
$2x^2 - 8x \leqslant 0$; on factorise : $2x(x-4) \leqslant 0$.
On réalise un tableau de signes :
Donc l'ensemble solution est $S = [0; 4]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCICE 2 :

1. Pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $3 - \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{3(x-1)-5}{x-1} = \dfrac{3x-8}{x-1} = g(x)$.

2. Variations de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$: on considère deux réels a et b dans $]1; +\infty[$, tels que $1 < a < b$:
On soustrait 1 : $0 < a - 1 < b - 1$; on passe à l'inverse : $\dfrac{1}{a-1} > \dfrac{1}{b-1}$; on multiplie par -5 : $\dfrac{-5}{a-1} < \dfrac{-5}{b-1}$; on ajoute 3 : $3 + \dfrac{-5}{a-1} < 3 + \dfrac{-5}{b-1}$; donc $g(a) < g(b)$; l'ordre est conservé, donc la fonction g est croissante sur $]1; +\infty[$.

3. Le tableau de variations de g sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

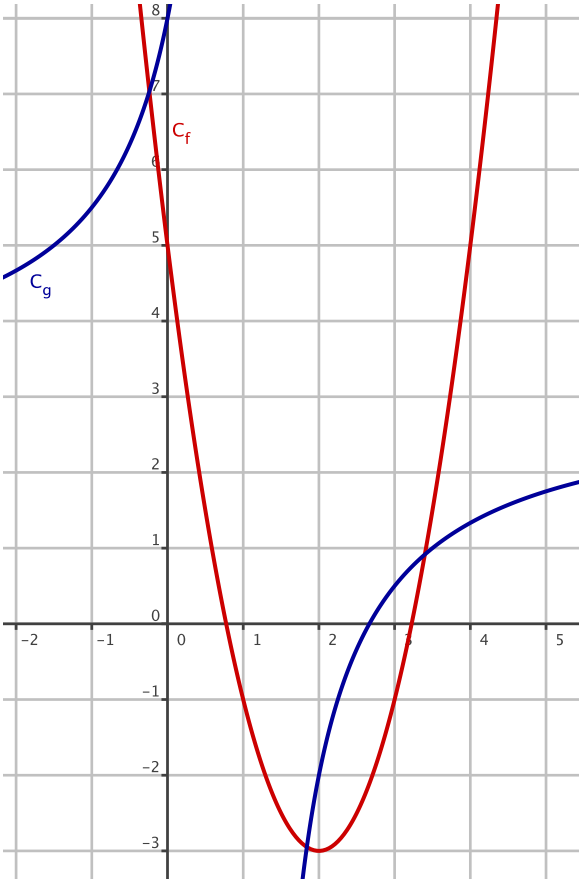
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	‖	‖	↗

4. L'inéquation $g(x) \geqslant 5$ équivaut à $\dfrac{3x-8}{x-1} \geqslant 5$ équivaut à
$\dfrac{3x-8}{x-1} - 5 \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{3x-8-5(x-1)}{x-1} \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{-2x-3}{x-1} \geqslant 0$.
On réalise un tableau de signes :

Donc l'ensemble solution est $S = [\dfrac{-3}{2} ; 1[$.

x	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$-2x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	

5. Sur la figure ci-dessous, on a représenté la fonction g. Représenter graphiquement la fonction f de l'exercice 1 .



Il y a trois solutions à l'équation $f(x) = g(x)$, qui sont – 0,24 ; 1,84 et 3,4 (valeurs approchées).