2^{nde} : correction du devoir commun (Février 2008)

Exercice 1 :

1) L'image de 2 est –2. f(-2) = 4.
2) Des valeurs approchées des antécédents de 0 sont : -3,3 ; 1,3 et 4,7.
3) Le maximum de f sur I est atteint pour x = 6 ; la valeur de ce maximum est 6.
4) tableau de variation de f :

x	-4		-1		3		6
f(x)	-4	↗	5	↘	-3	↗	6

5) La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [-1 ; 3]; donc pour tous réels a et b appartenant à cet intervalle, si a < b alors f(a) < f(b).
6) La courbe représentant la fonction g est la droite passant par les points de coordonnées (0 ; 2) et (2 ; 0).
7) Les solutions de l'inéquation f(x) $\leq$ g(x) sont les abscisses des points de la courbe de f se situant en dessous (ou sur) la droite représentant g : S = [-4 ; -2] $\cup$ [1 ; 4]

Exercice 2 :

1) $f(x) = 4-(x-1)^2 = \left[2-(x-1)\right]\left[2+(x-1)\right] = (2-x+1)(2+x-1)$

donc : $\boxed{f(x) = (3-x)(1+x)}$

2) $f(x) = 4-(x^2-2x+1) = 4-x^2+2x-1 = -x^2+2x+3$

3) l'équation f(x) = 4 s'écrit aussi : $4-(x-1)^2 = 4$ c'est à dire : $(x-1)^2 = 0$

qui équivaut à $x-1=0$ d'où la solution S = $\{1\}$

4) Les antécédents de 3 par f sont les solutions de l'équation $f(x)=3$

En utilisant l'expression développée, cette équation s'écrit : $-x^2+2x+3=3$

c'est à dire : $-x^2+2x=0 \iff x(-x+2)=0 \iff$ *x = 0 ou x = 2*

donc : S = $\{0;2\}$

5) Les nombres cherchés sont les solutions de l'équation $f(x)=0$

L'expression factorisée de f nous donne l'équation : $(3-x)(1+x)=0$

soit x = 3 , soit x = -1 . S = $\{-1;3\}$

(On retrouve les résultats des questions 3) 4) et 5) sur le graphique)

Exercice 3 :

Question **1)** : réponse **b)**
Question **2)** : réponse **b)**
Question **3)** : réponse **b)**
Question **4)** : réponse **a)**
Question **5)** : réponse **a)**
Question **6)** : réponse **c)**

Exercice 4 :

1) Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD rectangle en A nous donne : $BD^2 = AB^2 + AD^2$ d'où : $BD^2 = 8^2 + 6^2$ (AD = BC car ABCD est un rectangle) on obtient alors : $BD^2 = 100$; BD = $\sqrt{100} = 10$.
2) Les triangles AID et CJB sont tous deux rectangles respectivement en I et J. De plus, puisque (AD) et (BC) sont parallèles, les angles alternes internes $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux, donc : $\widehat{ADI} = \widehat{JBC}$. Les triangles AID et CJB ont donc deux angles de même mesure : $\widehat{AID} = \widehat{CJB}$ et $\widehat{ADI} = \widehat{JBC}$ donc le troisième l'est aussi, c'est à dire : $\widehat{DAI} = \widehat{JCB}$. Or on a AD = BC. Donc les 2 triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de mêmes mesures : ***ADI et CJB sont isométriques***.
Deux triangles isométriques ont leurs côtés deux à deux de mêmes longueurs, donc ***DI = BJ***.
3) a) Les triangles AID et BAD sont tous deux rectangles respectivement en I et A ; donc $\widehat{AID} = \widehat{DAB}$. De plus : $\widehat{ADI} = \widehat{ADB}$. Donc ces deux triangles ont deux angles de mêmes mesures, donc le troisième l'est aussi : $\widehat{DAI} = \widehat{ABD}$. Les triangles ***AID et BAD sont semblables***.
b) Les triangles AID et BAD étant semblables, leurs côtés sont proportionnels, c'est à dire : $\dfrac{ID}{AD} = \dfrac{AD}{BD}$ d'où : $ID = \dfrac{AD^2}{BD} = \dfrac{6^2}{10} = 3,6$ **ID = 3,6**
On sait que DI = BJ et IJ = BD-(ID + JB) donc IJ = 10 – 7,2 = 2,8 **IJ = 2,8**

Exercice 5 : partie A :

1) construction de M : Voir figure
2) On sait que $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{ND} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{NA} - 3(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$

c'est à dire : $-\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$ (construction de N : figure)

3) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$ or $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ (car ABCD est un parallélogramme) et $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

4) $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$ (relation de Chasles) or : $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$ on a

donc : $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

5) On en déduit que : $-2\overrightarrow{CM} = -2\times(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CN}$

L'égalité $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}$ traduit la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{CM}$; donc les points C, M et N sont alignés.

Partie B :

6) Placer A, B, C, D : voir figure

7) Pour démontrer que ABCD est un parallélogramme, prouvons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ABCD est un parallélogramme.

8) Soit $M\left(x;y\right)$ tel que $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ on a : $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\6-y\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3,5\\-2\end{pmatrix}$

les coordonnées de M sont donc solutions du système : $\begin{cases}5-x=-3,5\\6-y=-2\end{cases}$

qui a pour solution : $x = 8,5$ et $y = 8$ donc : $\boxed{M\left(8,5;8\right)}$

9) Soit $N(x;y)$ tel que $2\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ alors on montre (comme à la question 2)) que $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AD}$ Donc ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées :

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+2\\y-2\end{pmatrix}$ $3\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\-21\end{pmatrix}$ d'où : $\begin{cases}x+2=-3\\y-2=-21\end{cases}$ donc : $N(-5;-19)$

10) Pour prouver que les points M, N et C sont alignés nous allons montrer analytiquement que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires :

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-5-8,5\\-19-8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-13,5\\-27\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}4-8,5\\-1-8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}-4,5\\-9\end{pmatrix}$

on a alors : $\left(-13,5\right)\times(-9)-(-27)\times(-4,5)=0$ donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires , donc les points M, N et C sont alignés.

figure de la partie A :

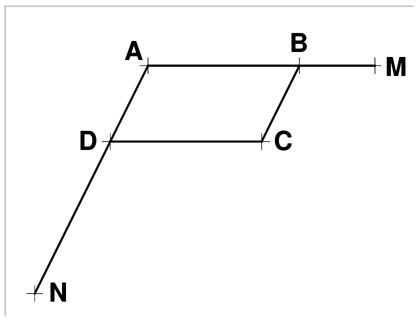

figure partie B :