LYCEE MISTRAL ***CORRIGE du DEVOIR COMMUN N° 2 DE MATHEMATIQUES***

EXERCICE 1

1) L'ensemble de définition de la fonction *f* est l'ensemble des abscisses des points de sa courbe représentative, c'est-à-dire ; $D_f = [-2 ; 3]$

2) L'image de –2 par la fonction *f* est l'ordonnée du point d'abscisse – 2 de la courbe représentative de *f* , c'est-à-dire 7.

3) $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$. Ce sont les ordonnées respectives des points d'abscisse 0 et 2 de la courbe représentative de *f*.

4) Les antécédents s de – 2 par la fonction *f* sont les abscisses des points d'ordonnée – 2 de la courbe représentative de *f* , c'est-à-dire respectivement 0 et 3. –3 n'a pas d'antécédent par la fonction *f* car la courbe représentative de *f* ne possède pas de points d'ordonnée – 3.

5) L'équation : $f(x) = 2$, admet pour ensemble de solutions : S = {– 1 ; 2}, abscisses des points d'ordonnée 2 de la courbe représentative de *f*.

6) L'inéquation : $f(x) > 2$, admet pour ensemble de solutions : S = [– 2 ; – 1[, abscisses des points :

- de la courbe représentative de *f* d'ordonnée strictement supérieure à 2.

ou

- de la courbe représentative de *f* situés strictement au-dessus de la droite d'équation : $y = 2$.

7) Le maximum de la fonction *f* sur l'intervalle [– 2 ; 3] est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe représentative de *f* , c'est-à-dire 7 . Il est atteint en – 2 abscisse du point d'ordonnée 7 de la courbe représentative de *f*.
Le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle [–2 ; 3] est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe représentative de *f* , c'est-à-dire –2. Il est atteint en 0 et 3 abscisses des points d'ordonnée – 2 de la courbe représentative de *f*.

8) Tableau de variation de la fonction *f* :

x	– 2		0		2		3
$f(x)$	7	$\searrow$	– 2	$\nearrow$	2	$\searrow$	– 2

EXERCICE 2

1) ABC triangle isocèle en A donc (AB) ⊥ (AC) ; de plus (ME) ⊥ (AB). Or deux droites (AC) et (ME) perpendiculaires à une même troisième droite (AB) sont parallèles entre elles. Le quadrilatère AMEF possédant 2 côtés parallèles est (au moins) un trapèze (rectangle).

2) Le nombre réel *x* appartient à l'intervalle [0 ; 4] vu que AB = 4 et que M est situé sur [AB].

3) Les triangles ABC et MBE ayant leurs côtés parallèles deux à deux [(AC) // (ME), (AB) = (MB) et (BC) = (EC)], on peut affirmer qu'ils sont semblables (en fait on a une configuration de Thalès). On en déduit que, comme le triangle ABC est rectangle et isocèle en A, le triangle MBE est rectangle et isocèle en M. Ce qui permet d'affirmer que EM = BM = *x*.

4) Les bases du trapèze AMEF sont : $B = \text{AF} = \dfrac{1}{2}\text{AC} = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$ et $b = \text{EM} = x$ et sa hauteur

$h = \text{AM} = \text{AB} - \text{MB} = 4 - x$. Donc $g(x) = \dfrac{1}{2}(b + B) \times h. = \dfrac{1}{2}(\text{EM} + \text{AF}) \times \text{AM} = \dfrac{1}{2}(x + 2)(4 - x)$.

5) La forme développée de $g(x)$ est : $g(x) = \dfrac{1}{2}(4x - x^2 + 8 - 2x) = \dfrac{1}{2}(-x^2 + 2x + 8) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 4$.

6) $g(2) = \dfrac{1}{2}(2 + 2)(4 - 2) = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$. On peut dire dans ce cas là que le trapèze AMEF est un carré.

7) a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x + 2)(4 - x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(4 - x) = 0 \Leftrightarrow [x + 2 = 0 \text{ ou } 4 - x = 0] \Leftrightarrow [x = -2 \text{ ou } x = 4]$.

Or $x \in [0 ; 4]$ donc seule la valeur 4 est solution. S = {4}.

b) $g(x) = 4 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 4 = 4 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + x = 0 \Leftrightarrow (-\dfrac{1}{2}x + 1)x = 0 \Leftrightarrow [-\dfrac{1}{2}x + 1 = 0 \text{ ou } x = 0] \Leftrightarrow$

[$\frac{1}{2}x = 1$ ou $x = 0$] $\Leftrightarrow$ [$x = 2$ ou $x = 0$]. Donc S = {0 ; 2}.

8) **a)** $-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

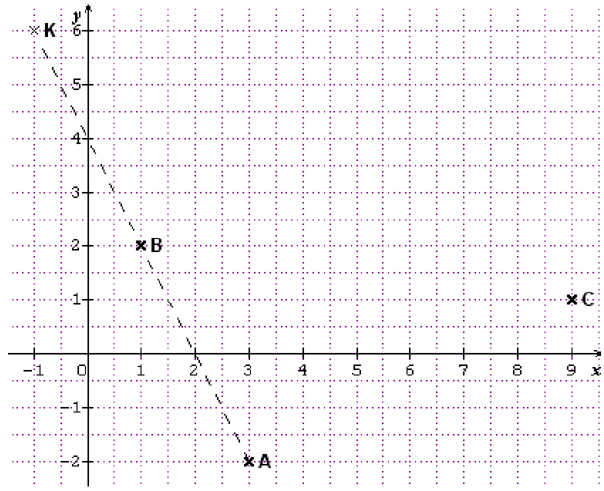
b) Pour tout $x \in [0 ; 4]$, $(x-1)^2 \geq 0$ (car un carré est toujours positif) $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-1)^2 \leq 0$ (car $-\frac{1}{2} < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{9}{2}$. $\frac{9}{2}$ est donc un majorant de g sur [0 ; 4].

Or $g(1) = \frac{1}{2}(1+2)(4-1) = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$. Donc $\frac{9}{2}$ est maximum de g sur [0 ; 4] : il est atteint en 1.

c) La valeur maximale de l'aire $g(x)$ du trapèze AMEF est donc $\frac{9}{2}$ atteint pour $x = 1$; la position de M pour laquelle elle est atteinte est située à 1 unité de l'extrémité B.

EXERCICE 3



1) Voir ci-contre $\overrightarrow{AB}\,(1-3; 2-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}\,(-2; 4)$.

2) $\overrightarrow{AB}\,(1-3; 2-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}\,(-2; 4)$.
$\overrightarrow{AC}\,(9-3; 1-(-2))$, soit $\overrightarrow{AC}\,(6; 3)$.
$\overrightarrow{BC}\,(9-1; 1-2)$, soit $\overrightarrow{BC}\,(8; -1)$.

3) AB = $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,

AC = $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$,

et BC = $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$,

4) Le triangle ABC est rectangle en A. En effet :
$AB^2 + AC^2 = 20 + 45 = 65 = BC^2$ et la réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure.

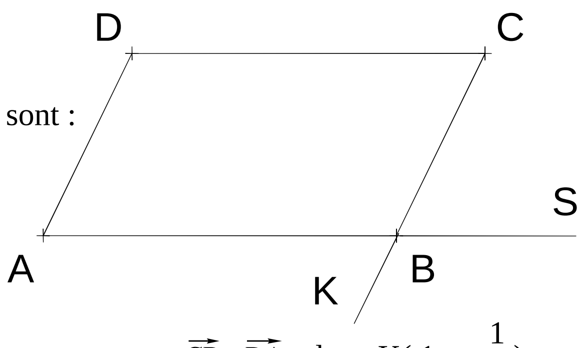
5) K symétrique de A par rapport à B $\Leftrightarrow$ B milieu de [AK] $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_B = \dfrac{x_A + x_K}{2} \\ y_B = \dfrac{y_A + y_K}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{3 + x_K}{2} \\ 2 = \dfrac{-2 + y_K}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2 = 3 + x_K \\ 4 = -2 + y_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3 = x_K \\ 4 + 2 = y_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = x_K \\ 6 = y_K \end{cases}$. Donc K(− 1 ; 6)

6) $\overrightarrow{BT}\,(-15-1; -6-2)$, soit $\overrightarrow{BT}\,(-16; -8)$ et $\overrightarrow{AC}\,(6; 3)$. On « voit » que leurs coordonnées sont proportionnelles (l'abscisse est la moitié de l'ordonnée) [ou bien on calcule det($\overrightarrow{BT}$; $\overrightarrow{AC}$) = $\begin{vmatrix} -16 & 6 \\ -8 & 3 \end{vmatrix}$ =

$-16 \times 3 - (-8) \times 6 = 0$]. Les vecteurs $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires d'où les droites (BT) et (AC) sont parallèles.

EXERCICE 4 :



1) Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$), les coordonnées des points sont :
A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1) et D(0 ; 1).

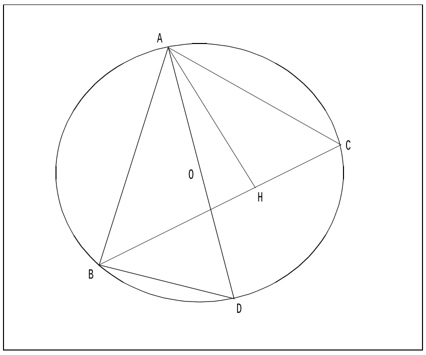
2) Voir ci-contre.

3) $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc : S ($\frac{3}{2}$; 0) et

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ car ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ donc K(1 ; $-\frac{1}{2}$).

4) Soit I le milieu de [KS] $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_S + x_K}{2} \\ y_I = \dfrac{y_S + y_K}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{\frac{3}{2}+1}{2} \\ y_I = \dfrac{0-\frac{1}{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{5}{4} \\ y_I = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ donc I $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

5) On étudie l'éventuelle colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ (1 – 0; 0 – 1), soit $\overrightarrow{DB}$ (1; – 1) et $\overrightarrow{DI}$ $\left(\frac{5}{4}-0\,;-\frac{1}{4}-1\right)$ **soit** $\overrightarrow{DI}$ $\left(\frac{5}{4};-\frac{5}{4}\right)$. Il est clair que $\overrightarrow{DI} = \frac{5}{4}\overrightarrow{DB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires. Les points D, B et I sont alignés.



EXERCICE 5

ABC est un triangle. Le cercle C de centre *O* et de rayon *R* est le cercle circonscrit à ce triangle. La droite (*OA*) recoupe le cercle en *D*. *H* est le pied de la hauteur issue de *A* dans le triangle *ABC*.

1) Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre *O* et de rayon *R* et ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, d'après le théorème de l'angle inscrit, ils ont la même mesure.

2) Le triangle *ABD* est rectangle en *B* car inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [*AD*]. Le triangle *AHC* est aussi rectangle en *H* car *H* pied de la hauteur issue de *A* dans le triangle *ABC*. Donc $\widehat{ABD} = \widehat{AHC} = 90°$ et $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{ACH}$. Alors les triangles *AHC* et *ABD* sont semblables car ils possèdent deux angles égaux deux à deux.

3) Les triangles *AHC* et *ABD* sont semblables : leurs côtés sont proportionnels 2 à 2. On en déduit les égalités de rapports suivant : $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{HC}{BD} = \dfrac{AC}{AD}$.

4) De $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AD}$ on déduit que : $AB \times AC = AD \times AH \Leftrightarrow AB \times AC = 2 \times R \times AH$ (car le diamètre $AD = 2 \times R$).

5) Alors, en multipliant les 2 membres de cette égalité par *BC*, on obtient

$AB \times AC \times BC = 2 \times R \times AH \times BC \Leftrightarrow AB \times AC \times BC = 4 \times R \times \dfrac{1}{2}\, AH \times BC = 4 \times R \times S$ où S est l'aire du triangle *ABC* de base *BC* et de hauteur *AH*.