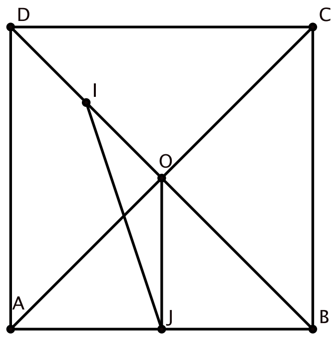
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 8 SECONDE 7



EXERCICE 1 :

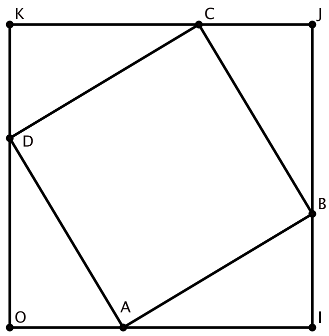
On considère un carré ABCD de centre O et de côté 1. Le point I est le milieu du segment [OD] et J est le milieu du segment [AB].
On considère le repère (A, B, D); dans ce repère, les points ont pour coordonnées A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1), D(0; 1).
Le point O est le milieu de [AC], donc O(0,5; 0,5).
Le point I est le milieu de [OD], donc I(0,25; 0,75).
Le point J est le milieu de [AB], donc J(0,5; 0).
On calcule les longueurs des côtés du triangle OIJ :

$$OI = \sqrt{(x_I - x_O)^2 + (y_I - y_O)^2} = \sqrt{(0,25-0,5)^2+(0,75-0,5)^2} = \sqrt{0,25^2+0,25^2} = \sqrt{0,125} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ ;$$

$$OJ = \sqrt{(x_J - x_O)^2 + (y_J - y_O)^2} = \sqrt{(0,5-0,5)^2+(0-0,5)^2} = \sqrt{0,5^2} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$IJ = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2} = \sqrt{(0,5-0,25)^2+(0-0,75)^2} = \sqrt{0,25^2+0,75^2} = \sqrt{0,625} = \frac{\sqrt{10}}{4}\ .$$

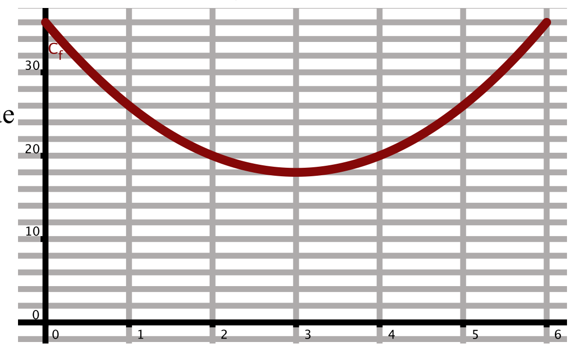
Le triangle OIJ est quelconque.



EXERCICE 2 :

On considère un carré OIKJ de côté 6 cm. Le point A est sur le côté [OI] tel que OA $= x$, B est sur le côté [IK] tel que IB $= x$, C est sur le côté [KJ] tel que KC $= x$, D est sur le côté [OJ] tel que JD $= x$.
1. La figure avec $x = 2$ cm :

2. Le quadrilatère ABCD est un losange; en effet, en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles AIB, BKC, CJD et DOA rectangles en I, J, K et O, on calcule AB : $AB^2 = AI^2 + IB^2 = (6 - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 12x + 36 = BC^2 = CD^2 = DA^2$; donc ABCD est un losange (quatre côtés de même longueur).
Dans le repère (O; I, J) les points de la figure ont pour coordonnées A(x; 0), B(6; x), C($6 - x$; 6) et D(0; $6 - x$) . D'où DB $= \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(6-0)^2+(x-(6-x))^2} = \sqrt{36+(2x-6)^2}$ et AC $= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6-x-x)^2+(6-0)^2} = \sqrt{(2x-6)^2+36}$; donc DB = AC. Le losange ABCD a des diagonales de même longueur, donc c'est un carré.
3. Comme A est un point du segment [OI], alors OA $= x$ varie dans l'intervalle [0; 6] .
4. L'aire du carré ABCD est égale à $AB^2 = f(x) = 2x^2 - 12x + 36$.
5. Pour tout réel x, on a $2(x - 3)^2 + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) + 18 = 2x^2 - 12x + 18 + 18 = f(x)$.
6. La représentation graphique de la fonction f est une parabole. Tracé de la courbe :



7. On en déduit le minimum de la fonction f : 18 atteint lorsque $x = 3$; en effet, pour tout réel x, on a $a(x - 3)^2 \geqslant 0$, donc $2(x - 3)^2 \geqslant 0$ et $2(x - 3)^2 + 18 \geqslant 18$.
8. Lorsque l'aire de ABCD est minimale, le point A vérifie OA = 3, donc A est le milieu de [OI].