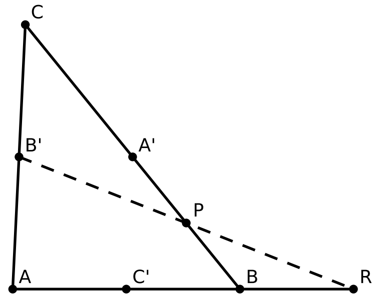
Exercice 1 : On considère un triangle ABC quelconque. Les points A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB]. Le point P est le milieu de [A'B] et R est le symétrique de C' par rapport à B.

1. La figure avec AB = 6 cm, AC = 7 cm et BC = 9 cm (échelle : 1/2)



2. Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) : A(0 ; 0) puisque c'est l'origine du repère. B(1 ; 0) et C(0 ; 1).

A' est le milieu de [BC], donc $x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, donc A'($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$).

B' est le milieu de [AC], donc $x_{B'} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ et $y_{B'} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, donc B'(0 ; $\frac{1}{2}$).

C' est le milieu de [AB], donc $x_{C'} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_{C'} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$, donc C'($\frac{1}{2}$; 0).

P est le milieu de [A'B], donc $x_P = \frac{x_{A'} + x_B}{2} = \frac{0,5+1}{2} = \frac{3}{4}$ et $y_P = \frac{y_{A'} + y_B}{2} = \frac{0,5+0}{2} = \frac{1}{4}$, donc P($\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$).

R est le symétrique de C' par rapport à B, donc B est le milieu de [RC'] ; ainsi $x_B = \frac{x_R + x_{C'}}{2}$, soit $x_R = 2x_B - x_{C'} = 2 - 0,5 = 1,5$; et $y_B = \frac{y_R + y_{C'}}{2}$, soit $y_R = 2y_B - y_{C'} = 0 - 0 = 0$; donc R($\frac{3}{2}$; 0).

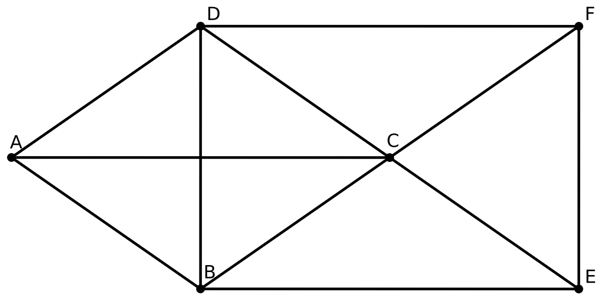
3. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PB'}$ et $\overrightarrow{PR}$: $\overrightarrow{PB'}$ $(x_{B'} - x_P ; y_{B'} - y_P)$, soit $\overrightarrow{PB'}$ ($\frac{-3}{4}$; $\frac{1}{4}$).

$\overrightarrow{PR}$ $(x_R - x_P ; y_R - y_P)$, soit $\overrightarrow{PR}$ ($\frac{3}{4}$; $\frac{-1}{4}$). Donc ces deux vecteurs son oppoés, ils sont donc colinéaires.

4. On en déduit que les points B', P et R sont alignés.

Exercice 2 : On considère le losange ABCD. Le point E est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et F est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. La figure :



2. Le point E est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux ; on sait aussi que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux puisque ABCD est un parallélogramme. Ainsi $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$ donc C est le milieu de [DE].

F est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. donc les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux, donc C est le milieu de [BF]. Ainsi, BEFD est un parallélogramme.

De plus, comme ABCD est un losange, BC = CD, donc DE = BF = 2CD ; les diagonales de BEFD sont de même longueur, donc BEFD est un rectangle.

Exercice 3 : Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$. On considère les points A(2 ; $\frac{5}{2}$), B(6 ; $\frac{9}{2}$) et C(3 ; $\frac{3}{2}$). 1. La figure ci-dessous.

2. Pour déterminer la nature du triangle ABC, on calcule les longueurs :

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (4,5-2,5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (1,5-2,5)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

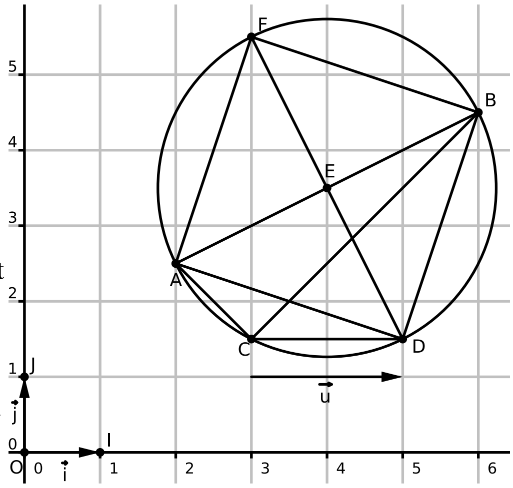
BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3-6)^2 + (1,5-4,5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

On a AB² = 20 = 2 + 18 = AC² + BC², donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

3. D est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$ (2 ; 0), donc $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$; d'où $x_D - x_C = 2$ et $y_D - y_C = 0$, on trouve $x_D = 2 + x_C = 5$ et $y_D = y_C = 1{,}5$. Ainsi D(5 ; 1,5).

4. Les coordonnées du point E milieu de [AB] : $x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$ et $y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2{,}5+4{,}5}{2} = 3{,}5$, donc E(4 ; 3,5).

5. On calcule les distances DA et DB : DA = $\sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (2{,}5-1{,}5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$; DB = $\sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(6-5)^2 + (4{,}5-1{,}5)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; donc DA = DB. Ainsi, D et E sont à égale distance des points A et B, donc ils sont sur la médiatrice du segment [AB] ; donc les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires.



6. Le point F est défini par $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE}$. Donc E est le milieu de [DF] et de [AB], donc ADBF est un parallélogramme. On a vu que DA = DB, donc ADBF est un losange.
De plus, AD² + DB² = 10 + 10 = 20 = AB², donc, ADB est un triangle rectangle en D ; ainsi ADBF est un carré.

7. Comme ADBF es un carré de centre E, les points A, D, B et F sont sur le cercle de centre E et de rayon AE = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{\sqrt{10}}{2}$.
De plus, le triangle ABC est rectangle en C, donc le centre du cercle circonscrit du triangle est le milieu de l'hypoténuse [AB]. Donc C est aussi sur le cercle de centre E et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ainsi les points A, B, C, D et F sont situés sur le cercle de centre E et le rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$.