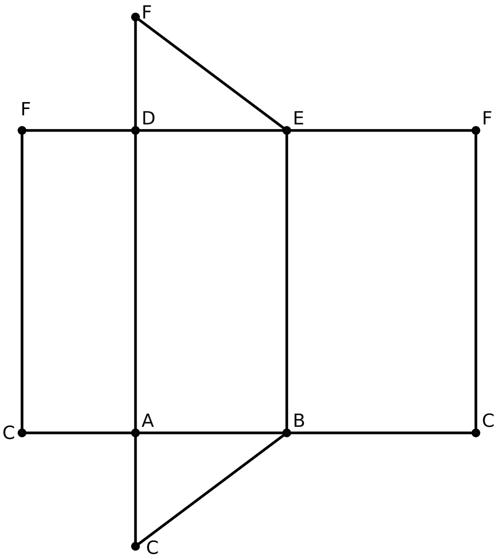
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3 SECONDE



On considère le prisme droit ABCDEF représenté ci-contre avec AB = 4, AC = 3, BE = 8 et le triangle ABC est rectangle en A.

1. Le patron de ce prisme :

2. L'aire du prisme est égale à l'aire des triangles de base et du haut et des trois rectangles formant les faces latérales. Le triangle ABC étant rectangle en A, on calcule BC à l'aide du théorème de Pythagore :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 = 5^2$, donc BC = 5.
Ainsi aire(prisme) = $2\,\dfrac{AB\times AC}{2} + AB\times AD + AC\times AD + BC\times BE =$
$3\times4 + 4\times8 + 3\times8 + 5\times8 = 108$.
Le volume du prisme est égal à l'aire de la base par la hauteur =
$\dfrac{AB\times AC}{2}\times BE = \dfrac{3\times4}{2}\times 8 = 48$.

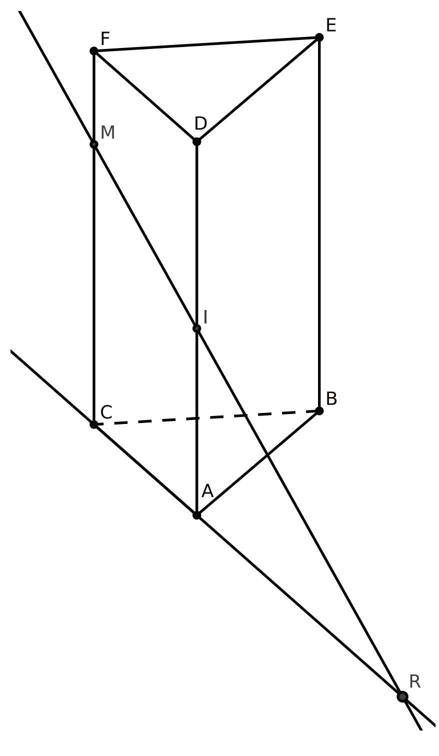
3. Le triangle ABE est rectangle en B, on calcule AE à l'aide du théorème de Pythagore :
$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 4^2 + 8^2 = 80$, donc AE = $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

4. On calcule CE : dans le triangle BCE rectangle en B, on utilise le théorème de Pythagore :
$CE^2 = CB^2 + BE^2 = 5^2 + 8^2 = 89$, donc CE = $\sqrt{89}$. On a $CE^2 = 89 = AE^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACE est rectangle en A.

5. On considère le point M de l'arête [CF], et on pose CM = x. dans ce cas, $x \in [0 ; 8]$.
a) Le triangle EFM est rectangle en F, donc $EM^2 = FM^2 + EF^2 = (8 - x)^2 + BC^2 = 64 - 16x + x^2 + 25 = x^2 - 16x + 89$.
b) Le triangle ACM est rectangle en C, donc $AM^2 = CM^2 + AC^2 = x^2 + 9$.
c) Le triangle AEM est isocèle en M si AM = EM, soit $AM^2 = EM^2$, soit $x^2 + 9 = x^2 - 16x + 89$; on soustrait x^2 de chaque côté : $9 = -16x + 89$; on soustrait 89 de chaque côté : $-80 = -16x$; on divise par -16 de chaque côté :
$x = \dfrac{-80}{-16} = 5$. Donc le triangle AEM est isocèle en M si $x = 5$. On vérifie $AM^2 = 34$ et $EM^2 = 34$.

6. a) Pour tout réel x, $(x-4)^2 - 7 = x^2 - 8x + 16 - 7 = x^2 - 8x + 9$.
b) Le triangle AEM est rectangle en M si $AM^2 + EM^2 = AE^2$, soit $x^2 + 9 + x^2 - 16x + 89 = 80$; on simplifie :
$2x^2 - 16x + 98 = 80$; on soustrait 80 de chaque côté : $2x^2 - 16x + 18 = 0$;on factorise par 2 : $2(x^2 - 8x + 9) = 0$. Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul, et comme 2 est non nul, on obtient $x^2 - 8x + 9 = 0$; d'après la question précédente, cette équation équivaut à $(x-4)^2 - 7 = 0$; on utilise l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$, soit $(x - 4 + \sqrt{7})(x - 4 - \sqrt{7}) = 0$; on trouve deux solutions $x_1 = 4 - \sqrt{7}$ et $x_1 = 4 + \sqrt{7}$.
Ainsi, le triangle AEM est rectangle en M lorsque $x = 4 - \sqrt{7}$ ou $x = 4 + \sqrt{7}$.

7. Soit I le milieu de l'arête [AD] et M tel que CM = 6.
a) Construction du point R intersection des droites (IM) et (AC) :



b) Pour calculer la longueur AR, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle CMR : les points R, A, C d'une part et les points R, I, M d'autre part sont alignés dans cet ordre et les droites (AI) et (CM) sont parallèles ;
donc $\dfrac{RA}{RC} = \dfrac{RI}{RM} = \dfrac{IA}{CM}$, d'où $\dfrac{RA}{RC} = \dfrac{IA}{CM}$, d'où $\dfrac{RA}{RA+AC} = \dfrac{4}{6}$,
d'où 6RA = 4(RA + 3), d'où 2RA = 12, RA = 6.

BONUS : On pose encore CM = x. On utilise encore le théorème de Thalès dans le triangle CMR : il y a trois situations suivant la position du point M :
Si CM > 4 : $\dfrac{RA}{RC} = \dfrac{RI}{RM} = \dfrac{IA}{CM}$, d'où $\dfrac{RA}{RC} = \dfrac{IA}{CM}$, d'où $\dfrac{RA}{RA+AC} = \dfrac{4}{x}$,
$\dfrac{AB}{AB+AC} = \dfrac{4}{x}$, $\dfrac{4}{4+3} = \dfrac{4}{x}$, $4x = 28$, $x = \dfrac{28}{4} = 7$.
Si CM = 4 : les droites (AC) et (IM) sont parallèles et le point R n'existe pas.
Si CM < 4 : $\dfrac{RA}{RC} = \dfrac{RI}{RM} = \dfrac{IA}{CM}$, d'où $\dfrac{RA}{RC} = \dfrac{IA}{CM}$, d'où $\dfrac{RA}{RA-AC} = \dfrac{4}{x}$,
$\dfrac{AB}{AB-AC} = \dfrac{4}{x}$, $\dfrac{4}{4-3} = \dfrac{4}{x}$, $4x = 4$, $x = 1$.
Pour que AR = AB, il faut que CM = 7 ou CM = 1.