CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 SECONDE

EXERCICE 1 : 1. a) $\frac{1}{x} \geqslant x$ équivaut à $\frac{1}{x} - x \geqslant 0$ équivaut à $\frac{1-x^2}{x} \geqslant 0$ équivaut à $\frac{(1-x)(1+x)}{x} \geqslant 0$. On réalise un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | + | | + | | + | 0 | – | | |
| $1+x$ | – | 0 | + | | + | | + | | |
| $x$ | – | | – | | 0 | + | | + | |
| quotient | + | 0 | – | ‖ | + | 0 | – | | |

Le quotient doit être positif, donc la solution est $S = ]-\infty; -1] \cup ]0 ; 1]$.

b) Les réels $x$ tels que l'inverse de $x$ soit supérieur à $x$ sont les réels dans $]-\infty; -1] \cup ]0 ; 1]$.

2. Par une méthode analogue, trouver tous les réels $x$ dont le cube est inférieur à $x$ :

$x^3 \leqslant x$ équivaut à $x^3 - x \leqslant 0$ équivaut à $x(x^2 - 1) \leqslant 0$ équivaut à $x(x - 1)(x + 1) \leqslant 0$.

On réalise un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | – | | | | | | 0 | + | |
| $x+1$ | – | 0 | + | | + | | | + | |
| $x$ | – | | – | | 0 | + | | + | |
| quotient | – | 0 | 0 | | – | 0 | + | | |

La solution est $S = ]-\infty; -1] \cup [0 ; 1]$.

EXERCICE 2 : On considère un repère orthonormé du plan et les points A(4 ; 3), B(– 2; 6) et C(1 ; – 3).

1. Pour déterminer la nature du triangle ABC, on calcule les longueurs AB, AC et BC :

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(-2-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{(-6)^2+(3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ;

$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(1-4)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ;

$BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2+(-3-6)^2} = \sqrt{3^2+(-9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ .

On a $AB^2 + AC^2 = 45 + 45 = 90 = BC^2$, donc, par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

2. Les coordonnées des milieux M, N et P des côtés [AB], [AC] et [BC] :

$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$

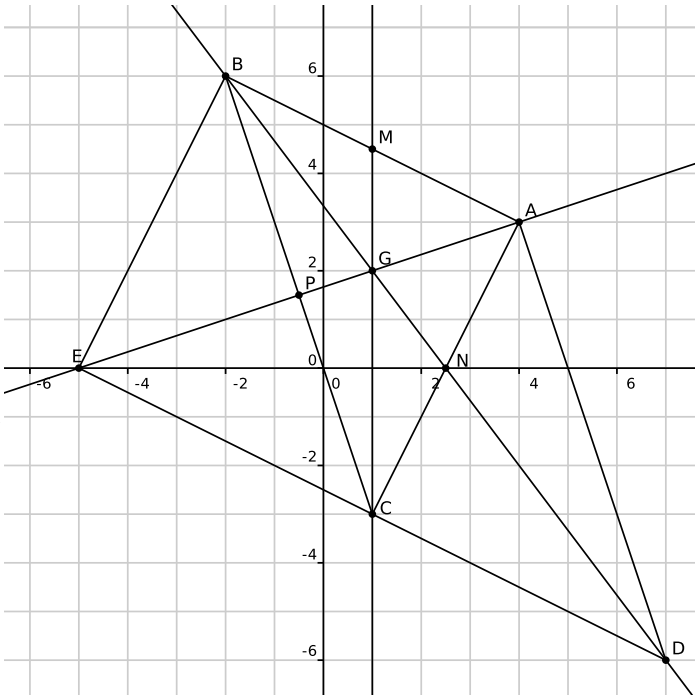
et $y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$. M(1 ; $\frac{9}{2}$ ).

$x_N = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

et $y_N = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$. N( $\frac{5}{2}$ ; 0).

$x_P = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$

et $y_P = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. P( $\frac{-1}{2}$ ; $\frac{3}{2}$ ).




3. L'équation de la médiane passant par A : c'est la droite (AP) :

le coefficient directeur est $m = \frac{y_P-y_A}{x_P-x_A} = \frac{3-1{,}5}{4+0{,}5} = \frac{1{,}5}{4{,}5} = \frac{1}{3}$ ; et l'ordonnée à l'origine $p$ vérifie : $\frac{1}{3}\times 4 + p = 3$, soit $p = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ .

L'équation de la médiane (AP) est $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = \frac{x+5}{3}$ .

L'équation de la médiane passant par B : c'est la droite (BN) :

le coefficient directeur est $m = \frac{y_N-y_B}{x_N-x_B} = \frac{6-0}{-2-2{,}5} = \frac{6}{-4{,}5} = \frac{-4}{3}$ ; et l'ordonnée à l'origine $p$ vérifie :

$\frac{-4}{3}\times(-2) + p = 6$, soit $p = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$. L'équation de la médiane (BN) est $y = \frac{-4}{3}x + \frac{10}{3} = \frac{-4x+10}{3}$.

L'équation de la médiane passant par C : c'est la droite (CM) : les abscisses de C et de M sont les mêmes, donc la droite (CM) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = x_C = 1$.

4. a) Pour trouver les coordonnées du point d'intersection des médianes (CM) et (AP), on résout ls système d'équation $x = 1$ et $y = \frac{x+5}{3}$. On remplace $x$ par 1 dans la deuxième équation : $y = \frac{1+5}{3} = 2$. Donc les coordonnées du point d'intersection des médianes (CM) et (AP) sont (1 ; 2).

b) Pour savoir si ce point est sur la troisième médiane (BN), on remplace $x$ et $y$ par ses coordonnées dans l'équation de la droite : $\frac{-4\times1+10}{3} = \frac{6}{3} = 2$. Ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, donc ce point est sur la troisième médiane. Les trois médianes sont concourantes.

c) Ce point est le centre de gravité du triangle ABC.

5. ABCD est un parallélogramme si ses diagonales se coupent en leur milieu. La diagonale [AC] a pour milieu N, donc [BD] a pour milieu N ; ainsi $x_N = \frac{x_B+x_D}{2}$, soit $x_D = 2x_N - x_B = 2\times2{,}5 - (-2) = 7$,

et $y_N = \frac{y_B+y_D}{2}$, soit $y_D = 2y_N - y_B = 2\times0 - 6 = -6$. Donc D(7 ; – 6).

6. ABEC est un parallélogramme si ses diagonales se coupent en leur milieu. La diagonale [BC] a pour milieu P, donc [AE] a pour milieu P ; ainsi $x_P = \frac{x_A+x_E}{2}$, soit $x_E = 2x_P - x_A = 2\times(-0{,}5) - 4 = -5$,

et $y_P = \frac{y_A+y_E}{2}$, soit $y_E = 2y_P - y_A = 2\times1{,}5 - 3 = 0$. Donc E(– 5 ; 0). Le parallélogramme ABEC est un carré, car le triangle ABC est rectangle isocèle en A, donc AB = AC = BE = EC, et l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.