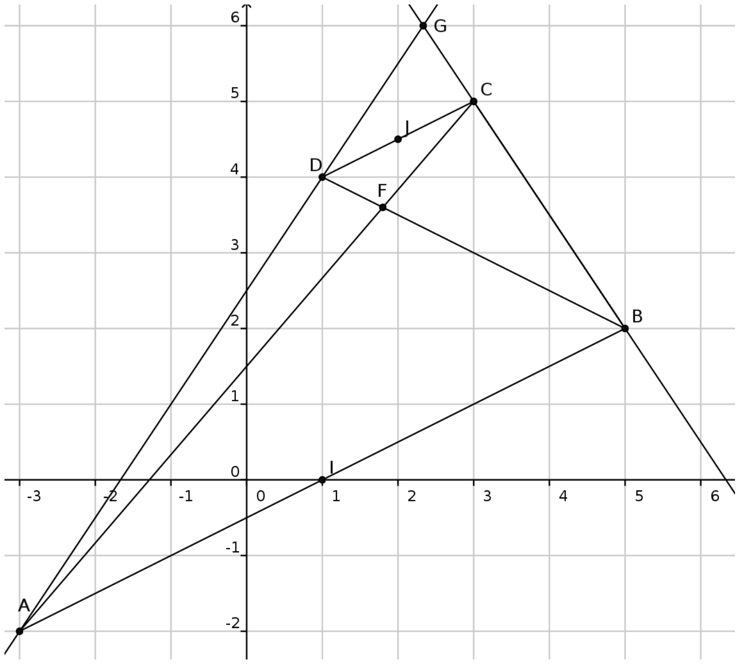
EXERCICE 1 : Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O; I, J), on considère les points A(– 3; – 2), B(5 ; 2), C(3 ; 5) et D(1 ; 4).



1. Les points A, B, C et D dans le plan.

2. Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on montre que leur coefficient directeur sont égaux :

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-(-2)}{5-(-3)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{4-5}{1-3} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.

Ils sont égaux, donc les droites (AB) et (CD) sont bien parallèles.

3. Les coordonnées de I milieu de [AB] :

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ et

$y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = 0$; I(1 ; 0).

et les coordonnées de J milieu de [CD] : $x_J = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $y_J = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{5+4}{2} = 4{,}5$; J(2 ; 4,5).

4. L'équation de la droite (AC) : les abscisses ne sont pas égales, donc l'équation est de la forme $y = mx + p$ avec

$m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{5-(-2)}{3-(-3)} = \dfrac{7}{6}$ et $p = y_C - mx_C = 5 - \dfrac{7}{6} \times 3 = 5 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{2}$;

donc l'équation de la droite (AC) est $y = \dfrac{7}{6}x + \dfrac{3}{2}$.

L'équation de la droite (BD) : les abscisses ne sont pas égales, donc l'équation est de la forme $y = mx + p$ avec

$m = \dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \dfrac{4-2}{1-5} = \dfrac{-1}{2}$ et $p = y_D - mx_D = 4 - \dfrac{-1}{2} \times 1 = 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$;

donc l'équation de la droite (BD) est $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{9}{2}$.

5. Pour déterminer les coordonnées du point F intersection des droites (AC) et (BD), on résout le système

d'équations $\begin{cases} y = \dfrac{7}{6}x + \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{9}{2} \end{cases}$. On a alors $\dfrac{7}{6}x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{9}{2}$ équivaut à $\dfrac{7}{6}x + \dfrac{1}{2}x = \dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{2}$ équivaut à

$\dfrac{10}{6}x = 3$ équivaut à $x = \dfrac{18}{10} = 1{,}8$; et $y = \dfrac{7}{6} \times \dfrac{18}{10} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{21}{10} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{36}{10} = 3{,}6$. Donc F(1,8 ; 3,6).

6. Le coefficient directeur de la droite (IJ) est égal à $\dfrac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \dfrac{4{,}5-0}{2-1} = 4{,}5$.

Le coefficient directeur de la droite (IF) est égal à $\dfrac{y_F - y_I}{x_F - x_I} = \dfrac{3{,}6-0}{1{,}8-1} = \dfrac{3{,}6}{0{,}8} = 4{,}5$. Ils sont égaux, donc les droites (IJ) et (IF) sont parallèles et les points I, J et F sont alignés.

BONUS : Soit G le point d'intersection des droites (AD) et (BC). L'équation de la droite (AD) : les abscisses ne sont pas égales, donc l'équation est de la forme $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \dfrac{4-(-2)}{1-(-3)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ et

$p = y_D - mx_D = 4 - \dfrac{3}{2} \times 1 = \dfrac{5}{2}$; donc l'équation de la droite (AD) est $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

L'équation de la droite (BC) : les abscisses ne sont pas égales, donc l'équation est de la forme $y = mx + p$ avec

$m = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{5-2}{3-5} = \dfrac{3}{-2} = \dfrac{-3}{2}$ et $p = y_B - mx_B = 2 - \dfrac{-3}{2} \times 5 = 2 + \dfrac{15}{2} = \dfrac{19}{2}$;

donc l'équation de la droite (BC) est $y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{19}{2}$.

5. Pour déterminer les coordonnées du point G intersection des droites (AD) et (BC), on résout le système d'équations $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{19}{2} \end{cases}$. On a alors $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2} = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{19}{2}$ équivaut à $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{19}{2} - \dfrac{5}{2}$ équivaut à $3x = 7$ équivaut à $x = \dfrac{7}{3}$; et $y = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{7}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{5}{2} = 6$. Donc G($\dfrac{7}{3}$; 6).

Le coefficient directeur de la droite (IG) est égal à $\dfrac{y_G - y_I}{x_G - x_I} = \dfrac{6-0}{\dfrac{7}{3} - 1} = \dfrac{6}{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{18}{4} = 4{,}5$ = le coefficient directeur de la droite (IJ). Donc les droites (IJ) et (IG) sont parallèles et les points I, J et G sont alignés.
Ainsi, les points I, J, F et G sont alignés.

<u>EXERCICE 2 :</u> 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
a) $x^2 > 2$; S = $]-\infty ; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2} ; +\infty[$
b) $3x^2 - 1 \leqslant 26$ équivaut à $3x^2 \leqslant 27$ équivaut à $x^2 \leqslant 9$; S = $[-3 ; 3]$.

2. Si $2 < x < 3$, on élève au carré des nombres positifs : $4 < x^2 < 9$, puis on multiplie par 2 : $8 < 2x^2 < 18$, puis on soustraie 7 : $1 < 2x^2 - 7 < 11$.

<u>EXERCICE 3 :</u> On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
1. On a $(x-2)^2 - 3 = (x^2 - 4x + 4) - 3 = x^2 - 4x + 1 = f(x)$.
2. On calcule $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $f(2) = 2^2 - 4\times 2 + 1 = -3$.
De plus, $a = 1 > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut. D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

3. Les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de f : S(2 ; – 3).

4. La courbe qui représente la fonction f est la A
(il suffit de calculer $f(0) = 1$).
5. L'équation $f(x) = 1$ équivaut à $x^2 - 4x + 1 = 1$ équivaut à $x^2 - 4x = 0$ équivaut à $x(x-4) = 0$. Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul : S = {0 ; 4}.
6. L'inéquation $f(x) \leqslant 0$ équivaut à $(x-2)^2 - 3 \leqslant 0$ équivaut à $(x-2)^2 \leqslant 3$ équivaut à $-\sqrt{3} \leqslant x - 2 \leqslant \sqrt{3}$ équivaut à $2 - \sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{3}$. S = $[2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3}]$.