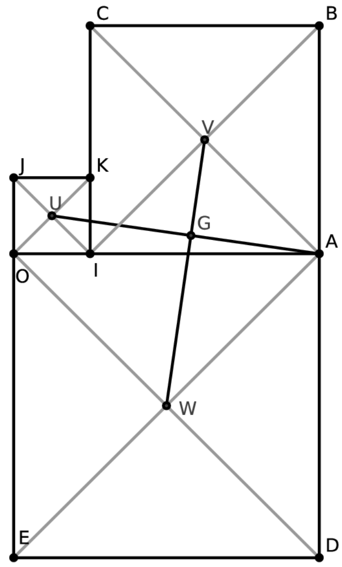
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 SECONDE 9

Sur la figure ci-contre, OIKJ, IABC et OADE sont des carrés tel que
OI = 1, OA = 4.

1. La figure à l'échelle 1:1.
2. Les points U, V et W centres respectifs des carrés OIKJ, IABC et OADE.



3. Le but de l'exercice est de trouver des propriétés sur les points U, V et W.

a) Dans le repère orthonormé (O ; I, J), on A(0 ; 0), I(1 ; 0), J(0 ; 1), K(1 ; 1), A(4 ; 0), B(4 ; 3), C(1 ; 3), D(4 ; – 4), E(0 ; – 4) .

b) Le point U, centre de OIKJ est le milieu de [OK], donc U($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$).

Le point V, centre de IABC est le milieu de [IB], donc

$x_V = \frac{x_I + x_B}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_V = \frac{y_I + y_B}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$, V($\frac{5}{2}$; $\frac{3}{2}$).

Le point W, centre de OADE est le milieu de [OD], donc

$x_W = \frac{x_O + x_D}{2} = 2$ et $y_W = \frac{y_O + y_D}{2} = -2$, W(2 ; – 2).

Les longueurs AU et VW :

$AU = \sqrt{(x_U - x_A)^2 + (y_U - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49+1}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$;

$VW = \sqrt{(x_W - x_V)^2 + (y_W - y_V)^2} = \sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-2-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+49}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; donc AU = VW.

c) Pour déterminer les coordonnées du point G intersection des droites (AU) et (VW), on détermine les équations des droites (AU) et (VW).

L'équation de la droite (AU) : les abscisses de A et U sont différentes, donc l'équation est de la forme $y = mx + p$;

et $m = \frac{y_U - y_A}{x_U - x_A} = \frac{0{,}5-0}{0{,}5-4} = \frac{0{,}5}{-3{,}5} = \frac{-1}{7}$; et l'ordonnée à l'origine p vérifie :

$\frac{-1}{7} \times 4 + p = 0$, soit $p = \frac{4}{7}$. L'équation de la droite (AU) est $y = \frac{-1}{7}x + \frac{4}{7} = \frac{-x+4}{7}$.

L'équation de la droite (VW): les abscisses de V et W sont différentes, donc l'équation est de la forme $y = mx + p$;

et $m = \frac{y_W - y_V}{x_W - x_V} = \frac{-2-1{,}5}{2-2{,}5} = \frac{-3{,}5}{-0{,}5} = 7$; et l'ordonnée à l'origine p vérifie :

$7 \times 2{,}5 + p = 1{,}5$, soit $p = 1{,}5 - 17{,}5 = -16$. L'équation de la droite (AU) est $y = 7x - 16$.

Les coordonnées du point G, intersection des droites (AU) et (VW) vérifient le système :

$\begin{cases} y = 7x - 16 \\ y = \frac{-x+4}{7} \end{cases}$. On résout l'équation $7x - 16 = \frac{-x+4}{7}$, soit $7(7x - 16) = -x + 4$, soit $49x - 112 = -x + 4$, soit

$50x = 116$, soit $x = \frac{116}{50} = \frac{58}{25} = 2{,}32$; l'ordonnée vérifie $y = 7\,\frac{58}{25} - 16 = \frac{6}{25} = 0{,}24$. Donc G($\frac{58}{25}$; $\frac{6}{25}$).

d) Pour trouver la nature du triangle VAG, on calcule les longueurs :

$VA = \sqrt{(x_A - x_V)^2 + (y_A - y_V)^2} = \sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{4{,}5}$;

$VG = \sqrt{(x_G - x_V)^2 + (y_G - y_V)^2} = \sqrt{(2{,}32-2{,}5)^2 + (0{,}24-1{,}5)^2} = \sqrt{(-0{,}18)^2 + (-1{,}26)^2} = \sqrt{1{,}62}$;

$AG = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} = \sqrt{(2{,}32-4)^2 + (0{,}24-0)^2} = \sqrt{(-1{,}68)^2 + (0{,}24)^2} = \sqrt{2{,}88}$.

On a $VG^2 + AG^2 = 1{,}62 + 2{,}88 = 4{,}5 = VA^2$. Donc le triangle VAG est rectangle en G.

4. On trouve ainsi que AU = VW et que les droites (AU) et (VW) sont perpendiculaires.