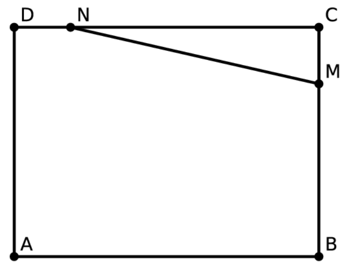
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 7 SECONDE 9



Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 4 cm, AD = 3 cm.
M est un point de [BC] et N un point de [CD] tel que CM = DN = x.
1. Comme M est sur le segment [BC] dont la longueur est égale à 3, alors CM = $x \in [0\,;3]$.

2. a) On a CN = $4 - x$. De plus, le triangle MNC est rectangle en C, donc l'aire S(x) = $\frac{\text{CM}\times\text{CN}}{2} = \frac{x(4-x)}{2} = \frac{-x^2+4x}{2} = \frac{-1}{2}x^2 + 2x$.

b) S(x) est un polynôme du second degré tel que $a = \frac{-1}{2} < 0$, donc la parabole représentative de ce polynôme est tournée vers le bas et $\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times\frac{-1}{2}} = 2$. Et S(2) = 2. D'où le tableau de variations de la fonction S sur l'intervalle [0 ; 3] :

x	0		2		3
S(x)	0	↗	2	↘	1,5

c) L'aire S(x) est minimale lorsque CM = x = 0 et elle vaut 0 cm².
L'aire S(x) est maximale lorsque CM = x = 2 et elle vaut 2 cm².

3. a) Le triangle CMN est rectangle en C, donc d'après le théorème de Pythagore,
$\text{MN}^2 = \text{CN}^2 + \text{CM}^2 = (4-x)^2 + x^2 = x^2 - 8x + 16 + x^2 = 2x^2 - 8x + 16 = f(x)$.

b) La fonction $f(x)$ est un polynôme du second degré tel que $a = 2 > 0$, donc la parabole représentative de ce polynôme est tournée vers le haut et $\frac{-b}{2a} = \frac{8}{2\times 2} = 2$. Et $f(2) = 8$. D'où le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3] :

x	0		2		3
$f(x)$	16	↘	8	↗	10

c) La longueur MN est minimale lorsque $\text{MN}^2 = f(x)$ est minimale, soit lorsque CM = x = 2 et cette longueur minimale est égale à $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

La longueur MN est maximale lorsque $\text{MN}^2 = f(x)$ est maximale, soit lorsque CM = x = 0 et cette longueur maximale est égale à $\sqrt{16} = 4$ cm.

4. a) Le triangle MNB a pour base MB et pour hauteur relative CN. Donc l'aire R(x) du triangle MNB =
$\frac{\text{MB}\times\text{CN}}{2} = \frac{(3-x)(4-x)}{2} = \frac{12-3x-4x+x^2}{2} = \frac{x^2-7x+12}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$.

b) Les aires S(x) et R(x) sont égales équivaut à $\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6 = \frac{-1}{2}x^2 + 2x$ équivaut à $x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0$.

On cherche la forme canonique de ce polynôme P(x) = $x^2 - \frac{11}{2}x + 6$: $\frac{-b}{2a} = \frac{\frac{11}{2}}{2\times 1} = \frac{11}{4}$.
Et $P\left(\frac{11}{4}\right) = \left(\frac{11}{4}\right)^2 - \frac{11}{2}\times\frac{11}{4} + 6 = \frac{121}{16} - \frac{121}{8} + 6 = \frac{121-242+96}{16} = \frac{-25}{16}$.
Donc $P(x) = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}$. La forme factorisée est $P(x) = \left(x - \frac{11}{4} + \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x-4)$.
D'où P(x) = 0 équivaut à $\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-4) = 0$ équivaut à $x - \frac{3}{2} = 0$ ou $x - 4 = 0$ équivaut à $x = \frac{3}{2}$ ou $x = 4$. La seule solution de l'intervalle [0 ; 3] est $\frac{3}{2}$. Donc les aires de CMN et de BMN sont égales lorsque CM = $x = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire lorsque M est au milieu de [BC].

c) Les aires S(x) et R(x) vérifient R(x) = 2S(x) équivaut à $\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6 = 2(\frac{-1}{2}x^2 + 2x)$ équivaut à $\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6 = -x^2 + 4x$ équivaut à $\frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 6 = 0$.

On cherche la forme canonique de ce polynôme $Q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 6$: $\frac{-b}{2a} = \frac{\frac{15}{2}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}$.

Et $Q(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}\times\frac{5}{2} + 6 = \frac{75}{8} - \frac{75}{4} + 6 = \frac{75-150+48}{8} = \frac{-27}{8}$. Donc $Q(x) = \frac{3}{2}(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{27}{8}$.

La forme factorisée est $Q(x) = \frac{3}{2}[(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}] = \frac{3}{2}[(x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2})(x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}(x-1)(x-4)$. D'où P($x$) = 0 équivaut à $\frac{3}{2}(x-1)(x-4) = 0$ équivaut à $x - 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$ équivaut à $x = 1$ ou $x = 4$. La seule solution de l'intervalle [0 ; 3] est 1. Donc les aires de CMN et de BMN vérifient R(x) = 2S(x) lorsque CM = x = 1.