

EXERCICE 1 (8 points)

Soit $A(x) = (3+x)^2 - (8x-1)(3+x)$.

1. On développe $A(x) = (3+x)^2 - (8x-1)(3+x) = 9 + 6x + x^2 - (24x + 8x^2 - 3 - x) = 9 + 6x + x^2 - 23x - 8x^2 + 3 = -7x^2 - 17x + 12$.

2. On factorise par $(3+x)$, soit $A(x) = (3+x)[(3+x) - (8x-1)] = (3+x)(-7x+4)$.

3. Résolution de l'inéquation $A(x) \leq 0$: on utilise la forme factorisée et on réalise un tableau de signes :

$3+x=0$ pour $x=-3$; et $-7x+4=0$ pour $x=\frac{4}{7}$.

La solution est $S =]-\infty ; -3] \cup [\frac{4}{7} ; +\infty[$.

x	$-\infty$	-3	$\frac{4}{7}$	$+\infty$	
$3+x$	$-$	0	$+$	$+$	
$-7x+4$	$+$		0	$-$	
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Résolution de l'inéquation $A(x) > 12$: on utilise la forme développée et on réalise un tableau de signes :

$A(x) = -7x^2 - 17x + 12 > 12$ équivaut à

$-7x^2 - 17x > 0$ équivaut à $x(-7x-17) > 0$.

$x=0$ pour $x=0$; et $-7x-17=0$ pour $x=-\frac{17}{7}$.

La solution est $S =]-\frac{17}{7} ; 0[$.

x	$-\infty$	$-\frac{17}{7}$	0	$+\infty$	
x	$-$	$-$	0	$+$	
$-7x-17$	$-$	0	$-$	$-$	
$-7x^2-11x$	$-$	0	$+$	0	$-$

EXERCICE 2 : On considère le repère orthonormé (O, I, J) du plan et les points $A(-2 ; 1)$, $B(4 ; -1)$ et $C(5 ; 2)$.

La figure correspondante :

1. Les coordonnées de K milieu de $[AC]$ sont données par :

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \text{ et}$$

$$y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} ;$$

donc $K(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$.

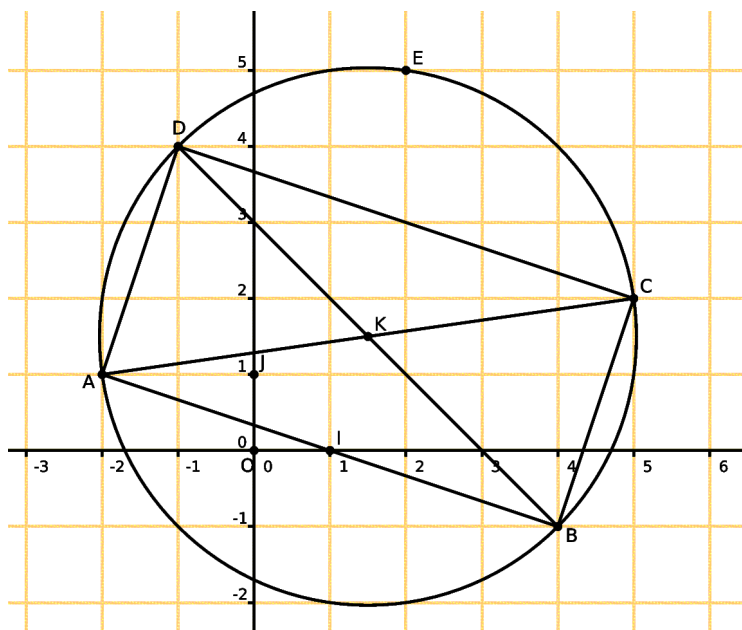
2. Le point K est le milieu de la diagonale

$$[BD], \text{ donc } x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{4+x_D}{2},$$

d'où $x_D = 2x_K - 4 = -1$;

$$\text{et } y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1+y_D}{2},$$

d'où $y_D = 2y_K + 1 = 4$; donc $D(-1 ; 4)$.



$$3. AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} ;$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} ;$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5 - 4)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

4. On a $AB^2 + AC^2 = 40 + 10 = 50 = BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

5. Le parallélogramme $ABCD$ est alors un rectangle puisque deux côtés adjacents forment un angle droit.

6. Pour savoir si le point E(2 ; 5) appartient au cercle de centre K passant par A, on compare la distance KE au

$$\text{rayon du cercle qui est KA. On a } AK = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}. \text{ Et } EK = \sqrt{(x_K - x_E)^2 + (y_K - y_E)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 5\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = AK. \text{ Donc le point E est sur le cercle.}$$

7. La fonction affine f dont la droite (AB) est la représentation graphique est de la forme $f(x) = ax + b$ avec

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 1}{4 - (-2)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}. \text{ Et } b \text{ vérifie l'équation } f(x_A) = ax_A + b, \text{ soit } 1 = \frac{-1}{3} \times (-2) + b, \text{ soit}$$

$$b = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \text{ Ainsi, la fonction } f \text{ s'écrit } f(x) = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{-x + 1}{3}.$$

8. Le point F(22 ; -7) est sur la droite (AB) si ses coordonnées vérifient $f(x_F) = ax_F + b$:

$$ax_F + b = \frac{-22 + 1}{3} = \frac{-21}{3} = -7 = f(x_F). \text{ Donc le point F appartient à la droite (AB).}$$