

EXERCICE 1

Partie 1 – Etude d'un algorithme

x	0	6	20	35	40
Expression de $f(x)$ utilisée	$-x+17$	$-x+17$	$1,2x-5$	$34-0,1x$	$34-0,1x$
Coût en euros	17	11	19	30,5	30

Partie 2 – Etude d'une fonction

1) Représentation graphique

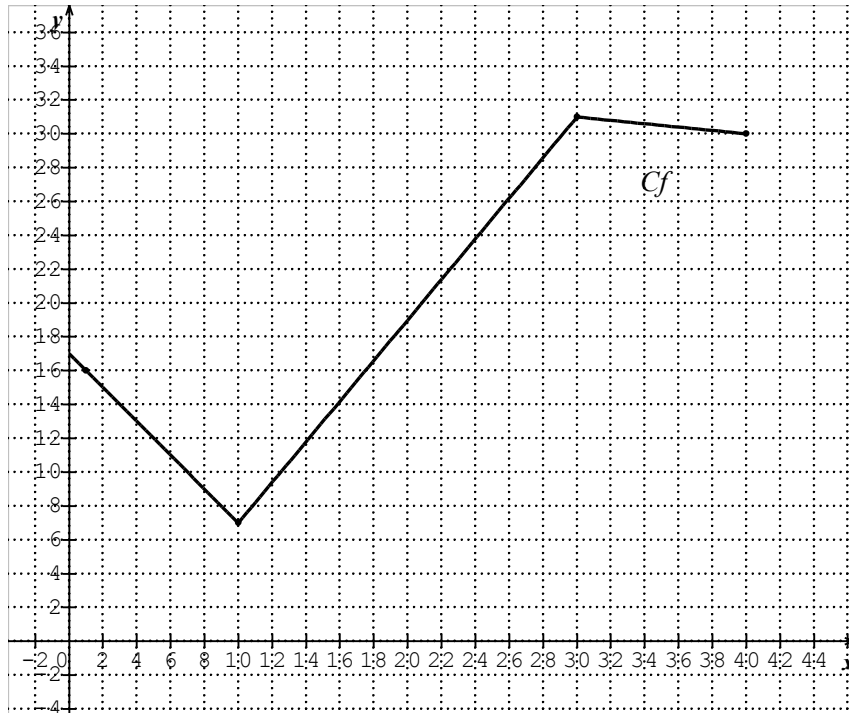
$$f(x) = -x+17 \quad \text{si } 0 \leq x < 10 \quad \left| \quad f(x) = 1,2x-5 \quad \text{si } 10 \leq x < 30 \quad \left| \quad f(x) = 34-0,1x \quad \text{si } 30 \leq x \leq 40$$

x	0	5	9
$f(x)$	17	12	8

x	10	20	29
$f(x)$	7	19	29,8

x	30	35	40
$f(x)$	31	30,5	30

2) Le coût minimum est de 7 € et il est obtenu pour la fabrication de 10 000 calculatrices



3) b) Algorithme

Variables

x, y sont des réels positifs

Début

Lire x

Si $0 \leq x < 30$

Alors y prend la valeur $12+0,5x$

sinon y prend la valeur $-0,9x+54$

Fin Si

Afficher « $f(x) =$ »

Afficher y

Fin

3) a) f est une fonction affine donc l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$

$$a = \frac{f(30) - f(40)}{30 - 40} = \frac{27 - 18}{-10} = \frac{-9}{10} = -0,9$$

On a donc $\boxed{f(x) = -0,9x + 54}$

$$f(30) = -0,9 \times 30 + b \Leftrightarrow 27 = -27 + b \Leftrightarrow 27 + 27 = b \Leftrightarrow 54 = b$$

EXERCICE 2

1) Faux Si $x^2 \geq 1$ alors $x \geq 1$ ou $x \leq -1$ $S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

2) Vrai $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$

3) Vrai Les deux droites ont le même coefficient directeur : $-\frac{1}{3}$ $y = \frac{1-2x}{6} = \frac{1}{6} - \frac{2x}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1x}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

4) Faux $\alpha = \frac{-18}{2 \times (-3)} = \frac{-18}{-6} = 3$ $f(3) = -3 \times 3^2 + 18 \times 3 - 1 = -3 \times 9 + 54 - 1 = 26 \neq -25$

5) Faux $A = 4 - (1-2x)^2 = 2^2 - (1-2x)^2 = (2 - (1-2x))(2 + 1-2x) = (2-1+2x)(3-2x) = (1+2x)(3-2x)$

EXERCICE 3

Partie 1 – Etude de la fonction

1. Pour tout $x \in [1;10]$ f est telle que $f(x) = -x^2 + 12x + 4$

On a $a = -1$ $b = 12$ $c = 4$

C_f est une parabole orientée vers le bas ($\cap$) car

$$a = -1 < 0$$

$$2. \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$f(6) = -6^2 + 12 \times 6 + 4 = -36 + 72 + 4 = 40 \quad A(6;40)$$

La forme canonique de f est $f(x) = -(x-6)^2 + 40$

3. La fonction f est croissante sur $[1;6]$ et décroissante sur $[6;10]$

4. Le prix moyen maximal du Go est 40 euros obtenu pour $x = 6$ Go

5. Le prix moyen minimal du Go est 15 euros obtenu pour $x = 1$ ou $x = 10$ Go

	1	6	10
$f(x)$	15	40	24

Partie 2 - Résolution d'une inéquation

$$1. f(x) \geq 31 \Leftrightarrow -x^2 + 12x + 4 \geq 31 \Leftrightarrow -x^2 + 12x + 4 - 31 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 \geq 0$$

$$2. (3-x)(x-9) = 3x - 27 - x^2 + 9x = -x^2 + 12x - 27$$

3.

x	$-\infty$	3	9	$+\infty$	
$3-x$	+	0	-	-	
$x-9$	-	-	0	+	
$(3-x)(x-9)$	-	0	+	0	-

$$3-x=0 \Leftrightarrow 3=x$$

$$x-9=0 \Leftrightarrow x=9$$

4. Résolution de l'inéquation $(3-x)(x-9) \geq 0$:

D'après la question 2 : $f(x) \geq 31 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(x-9) \geq 0$ donc $S = [3;9]$

Le prix moyen du Go est supérieur ou égal à 31 euros pour une capacité de stockage de 3 Go à 9 Go.

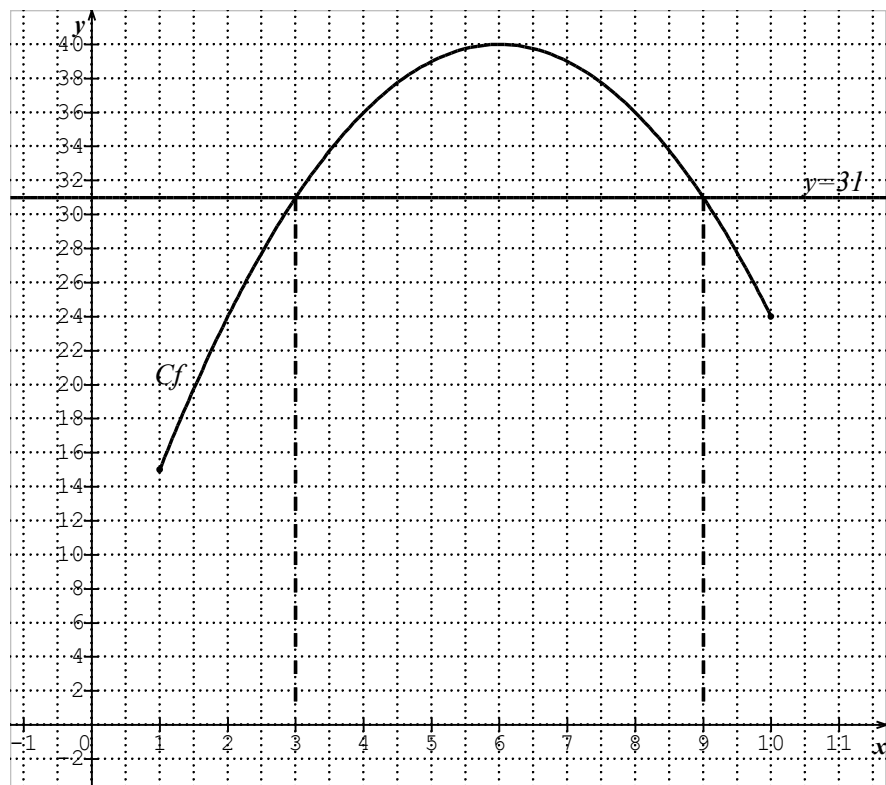
Partie 3 - Représentation graphique

1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	15	24	31	36	39	40	39	36	31	24

2. graphique (ci-contre)

3. On lit graphiquement que le prix moyen est supérieur ou égal à 31 euros pour une capacité de stockage comprise entre 3 et 9 Go.



EXERCICE 4 :

$$1) \quad x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+5}{2} = 2,5 \quad \text{Donc } K(4; 2,5)$$
$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \quad \text{Donc : } P(5; 0)$$

2) $x_B \neq x_K$ donc la droite (BK) a une équation de la forme : $y = mx + p$ avec pour coefficient directeur

$$m = \frac{y_K - y_B}{x_K - x_B} = \frac{\frac{5}{2} - 0}{4 - 8} = -\frac{\frac{5}{2}}{4} = -\frac{5}{8} \quad (\text{ou } -0,625)$$

L'équation de (BK) est donc $y = -\frac{5}{8}x + p$ Déterminons p : $B(8;0) \in (BK)$ donc : $0 = -\frac{5}{8} \times 8 + p$ donc : $p = 5$

L'équation de (BK) est : $\boxed{y = -\frac{5}{8}x + 5}$

3) $5 \times x_C - 25 = 5 \times 6 - 25 = 5 = y_C$ donc le point C appartient à Δ .

$$5 \times x_P - 25 = 5 \times 5 - 25 = 0 = y_P \quad \text{donc le point P appartient à } \Delta.$$

4) a) Les droites Δ et (BK) ont des coefficients directeurs différents ($-\frac{5}{8} \neq 5$) donc elles sont bien sécantes en un point G dont les coordonnées $(x; y)$ sont solution du système formé par les deux équations des droites :

$$\begin{cases} y = 5x - 25 \\ y = -\frac{5}{8}x + 5 \end{cases} \quad \text{On détermine } x \text{ en résolvant : } 5x - 25 = -\frac{5}{8}x + 5$$

$$\text{C'est-à-dire : } 5x + \frac{5}{8}x = 25 + 5 \Leftrightarrow \frac{45}{8}x = 30 \Leftrightarrow x = 30 \times \frac{8}{45} = \frac{15 \times 2 \times 8}{15 \times 3} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Calcul de } y : y = 5x - 25 = 5 \times \frac{16}{3} - 25 = \frac{80 - 75}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{donc : } \boxed{G\left(\frac{16}{3}; \frac{5}{3}\right)}$$

b) D'après la question 3) on sait que la droite Δ est en fait la droite (CP). Or P étant le milieu de [AB], (CP) est la médiane issue de C, dans le triangle ABC. De plus, K étant le milieu de [AC], (BK) est la médiane issue de B dans le triangle ABC. Donc le point G, intersection de (CP) et (BK), est le centre de gravité du triangle ABC.

$$c) \quad PG = \sqrt{(x_G - x_P)^2 + (y_G - y_P)^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 0\right)^2}$$

$$PG = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{\sqrt{26}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{26}$$

d) 1ere façon : On sait que le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers en partant du sommet, donc : $CG = \frac{2}{3}CP$ C'est-à-dire aussi : $PG = \frac{1}{3}PC$ ou encore : $PC = 3PG$

2eme façon : calcul de PC :

$$PC = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2} = \sqrt{(6 - 5)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$\text{On a donc bien : } 3PG = 3 \times \frac{1}{3}\sqrt{26} = \sqrt{26} = PC$$

$$5) \quad a) \quad PE = \sqrt{(x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

b) On d'une part : $PC^2 = 26$ et d'autre part : $PE^2 + EC^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{18}^2 = 8 + 18 = 26$ donc, puisque $PE^2 + EC^2 = PC^2$ on peut en déduire, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle PEC est rectangle en E. Son aire est donc égale à : $\frac{1}{2} \times PE \times EC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$

c) calcul de l'aire du triangle ABC : $\frac{1}{2} \times AB \times h$ où h est la hauteur issue de C. Or puisque les points A et B sont situés sur l'axe des abscisses du repère et que les coordonnées de C sont (6 ; 5), on en déduit que $h = 5$. Donc :

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times h = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15 \text{ alors : } \frac{2}{5} \text{aire}(ABC) = \frac{2}{5} \times 15 = 2 \times 3 = 6 = \text{aire}(PEC)$$

Donc l'affirmation est vraie.

