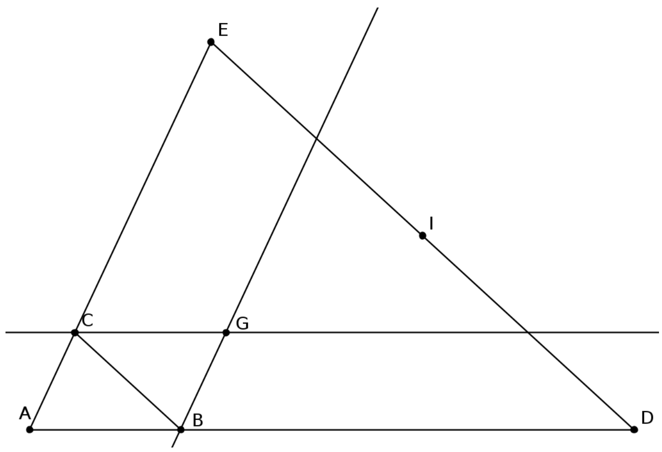
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 7 SECONDE 2

EXERCICE 1 : On considère le triangle ABC ci-dessous.

1. Construction des points D et E définis par $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{CB}$ et de I, milieu du segment [DE].

On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

3. Les coordonnées des points A(0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1).



4. Comme $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AC}$, alors $x_E - x_A = 4(x_C - x_A)$,
soit $x_E = x_A + 0 = 0$;
et $y_E - y_A = 4(y_C - y_A)$, soit $y_E = y_A + 4 = 4$;
donc E(0 ; 4).
Comme $\overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{CB}$, alors $x_D - x_E = 4(x_B - x_C)$,
soit $x_D = x_E + 4$, soit $x_D = 4$;
et $y_D - y_E = 4(y_B - y_C)$, soit $y_D = y_E - 4$, soit $y_D = 0$;
donc D(4 ; 0).
I est le milieu de [DE],
donc $x_I = \dfrac{x_D + x_E}{2} = 2$ et $y_I = \dfrac{y_D + y_E}{2} = 2$;
donc I(2 ; 2).

5. Pour démontrer que les droites (BC) et (ED) sont parallèles, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{CB}$ $(x_B - x_C\,;\ y_B - y_C)$, soit $\overrightarrow{CB}$ (1 ; – 1) ; et $\overrightarrow{ED}$ (4 ; – 4) ; on voit que $\overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{CB}$, donc ces vecteurs sont colinéaires et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

6. On transforme : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$ équivaut à $-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

7. Construction du point G sur la figure.

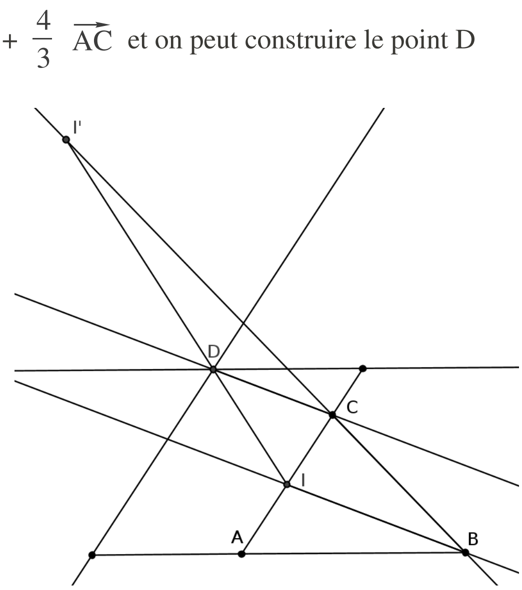
8. Le quadrilatère ABGC est un parallélogramme car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC}$.

9. Pour montrer que les points A, G et I sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{AG}$ (1 ; 1) et $\overrightarrow{AI}$ (2 ; 2) ; donc $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AG}$, donc les vecteurs sont colinéaires, et les points A, G et I sont alignés.

EXERCICE 2 : On considère un triangle ABC.

1. Pour construire le point D défini par $\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$, on transforme l'expression :
$\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{DA} - 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$
équivaut à $\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{DA} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
équivaut à $3\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$ équivaut à $\overrightarrow{AD} = \dfrac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et on peut construire le point D après avoir construit les vecteurs $\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

2. Soit I le milieu du segment [AC].
Le quadrilatère BIDC est un trapèze :



$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \dfrac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Et $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; alors $\overrightarrow{CD} = \dfrac{-2}{3}\overrightarrow{IB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires, les droites (CD) et (IB) sont parallèles, et BIDC est un trapèze.

3. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} =$
$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} - 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) + 4(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = 3\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{MD}$ car
$\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

4. Pour construire le point I' défini par $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}$, on utilise la relation précédente :
$\overrightarrow{II'} = 3\overrightarrow{ID}$, d'où la construction.

5. Les points B,C et I' sont alignés ; en effet

$$\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) =$$

$$-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 3(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}) = -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{BC} ;$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{BI'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les points B,C et I' sont alignés.