EXERCICE 1 : On lance un dé cubique 100 fois. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % auquel doit appartenir la fréquence d'apparition du chiffre est $[\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{n}}] = [0{,}066 ; 0{,}267]$

On lance 100 fois ce dé ; on obtient les résultats suivants :

face	1	2	3	4	5	6
effectifs	18	20	22	9	16	15
fréquences	0,18	0,2	0,22	0,09	0,16	0,15

Les fréquences observées sont toutes dans l'intervalle de fluctuation précédent ; donc on peut dire au seuil de 95 % que ce dé est équilibré (non truqué).

EXERCICE 2 : Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les points A(– 5 ; 3), B(– 2 ; – 1) et C(2 ; 2).

1. On a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-(-5))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

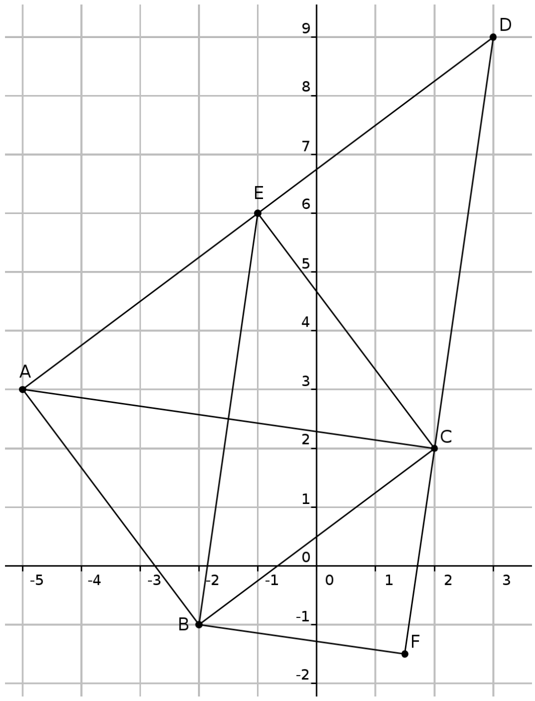
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-(-5))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

et $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

2. On a AB = BC et $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50 = AC^2$. Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

3. Construction des points D, E et F définis par

$\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$.



4. Les coordonnées des points D, E et F :

Comme $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{BC}$, alors $x_D - x_A = 2(x_C - x_B) = 8$,
soit $x_D = x_A + 8 = 3$;
et $y_D - y_A = 2(y_C - y_B) = 6$, soit $y_D = y_A + 6 = 9$; donc D(3 ; 9).

Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, alors $x_E - x_B = x_A - x_B + x_C - x_B = 1$,
soit $x_E = x_B + 1 = -1$;
et $y_E - y_B = y_A - y_B + y_C - y_B = 7$,soit $y_E = y_B + 7 = 5$;
donc E(– 1 ; 5).

Comme $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$, alors $x_F - x_B = 0{,}5(x_C - x_A) = 3{,}5$,
soit $x_F = x_B + 3{,}5 = 1{,}5$;
et $y_F - y_B = 0{,}5(y_C - y_A) = -0{,}5$, soit $y_F = y_B - 0{,}5 = -1{,}5$;
donc F(1,5 ; – 1,5).

5. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ $(x_D - x_C ; y_D - y_C)$,
soit $\overrightarrow{CD}$ (1 ; 7)
et $\overrightarrow{CF}$ $(x_F - x_C ; y_F - y_C)$, soit $\overrightarrow{CF}$ (– 0,5 ; – 3,5).

6. Les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CF}$ vérifient $1\times(-3{,}5) - 7\times(-0{,}5) = -3{,}5 + 3{,}5 = 0$,
donc les coordonnées sont proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires et les points C, D et F sont alignés.

7. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ $(x_E - x_B ; y_E - y_B)$, soit $\overrightarrow{BE}$ (1 ; 7)
et $\overrightarrow{DF}$ $(x_F - x_D ; y_F - y_D)$, soit $\overrightarrow{DF}$ (– 1,5 ; – 10,5).

6. Les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}$ vérifient $1\times(-10{,}5) - 7\times(-1{,}5) = -10{,}5 + 10{,}5 = 0$,
donc les coordonnées sont proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et les droites (BE) et (DF) sont parallèles.

EXERCICE 3 : Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle.

1. Construction des points E, F, G et H définis par :
E est le symétrique de C par rapport à A (ou $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA}$)
le point F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$;
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EC}$;
ECHB est un parallélogramme.

2. Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AC}$, et un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CH}$.

3. Comme ECHB est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BH}$; de plus $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EC}$; donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BH}$ et le quadrilatère ABHG est un parallélogramme.

4. Comme le point F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$, alors $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BF}$;
de plus $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA}$; donc $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ et BCGF est un parallélogramme.
5. [AH] et [BG] sont les diagonales du parallélogramme ABHG donc se coupent en leur milieu.
[CF] et [BG] sont les diagonales du parallélogramme BCGF donc se coupent en leur milieu.
Ainsi les droites (AH), (BG) et (CF) sont concourantes en un point qui est le centre des parallélogrammes ABHG et BCGF.
6. On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).
a) Les coordonnées des points A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), E(0 ; – 1), F(1 ; 1), G(0 ; 2) et H(1 ; 2).
b) Les coordonnées du point D milieu de [GF] : $x_D = \dfrac{x_F + x_G}{2} = 0{,}5$ et $y_D = \dfrac{y_F + y_G}{2} = 1{,}5$; donc F(0,5 ; 1,5).

c) $\overrightarrow{AD}$ (0,5 ; 1,5) et $\overrightarrow{EH}$ (1 ; 3). Le tableau

0,5	1,5
1	3

est un tableau de proportionnalité car 0,5×3 = 1×1,5, donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont colinéaires et les droites (AD) et (EH) sont parallèles.