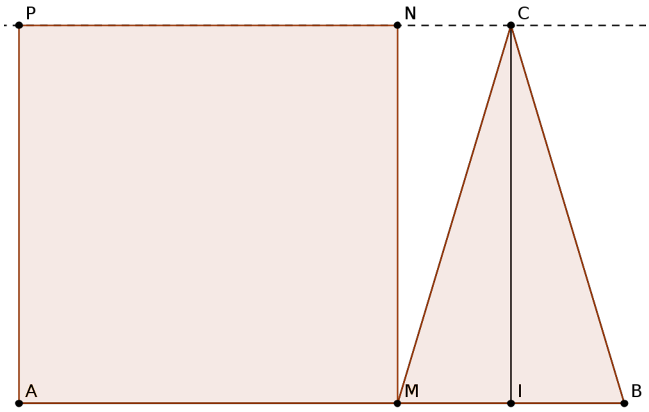
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 2 SECONDE 502

On considère un segment [AB] de longueur 8 cm et un point M sur ce segment. On construit alors le carré AMNP et le triangle MBC isocèle en C tel que N, P et C sont alignés.



1. La figure en prenant AM = 5 :
On pose AM = x.
2. Le périmètre du carré est $p(x) = 4x$ (fonction affine, et même linéaire).
3. Le périmètre du triangle est $q(x)$ = MB + CM + CB.
Le triangle est isocèle en C, donc CM = CB. Pour calculer cette longueur, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle MIC rectangle en I où I est le milieu de [MB] (la hauteur [IC] est aussi médiane).

On a MB = $8 - x$, donc IM = $\dfrac{8-x}{2}$; de plus IC = MN = AM = x ; d'où $\text{MC}^2 = \text{IM}^2 + \text{IC}^2 = \left(\dfrac{8-x}{2}\right)^2 + x^2 =$ $\dfrac{64-16x+x^2}{4} + x^2 = \dfrac{64-16x+5x^2}{4}$; donc MC = $\sqrt{\dfrac{64-16x+5x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{64-16x+5x^2}}{2}$.

Ainsi $q(x) = 2\,\dfrac{\sqrt{64-16x+5x^2}}{2} + 8 - x = \sqrt{64-16x+5x^2} + 8 - x$.

4. L'aire du carré est $a(x) = x^2$.

5. L'aire du triangle est $s(x) = \dfrac{\text{MB}\times\text{IC}}{2} = \dfrac{(8-x)x}{2} = \dfrac{-x^2+8x}{2}$.

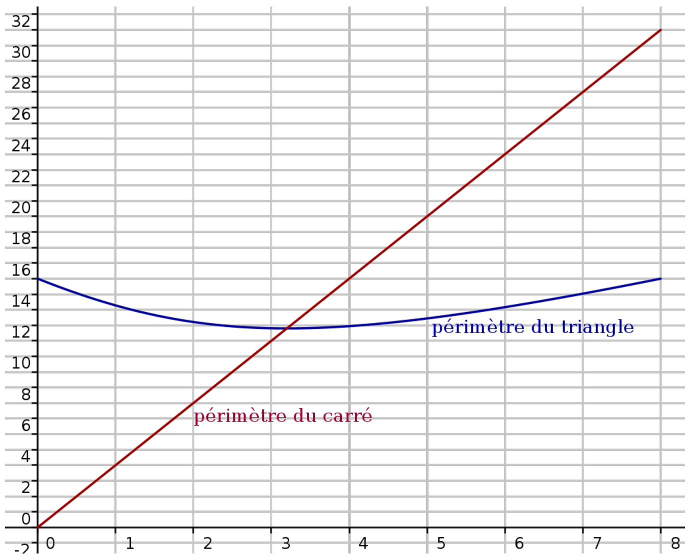
6. L'ensemble de définition des quatre fonctions est l'intervalle [0 ; 8] car M est un point du segment [AB] et AB = 8.

7. Les fonctions croissantes sur [0 ; 8] : a et p.

8. Le tableau de variations de la fonction s :

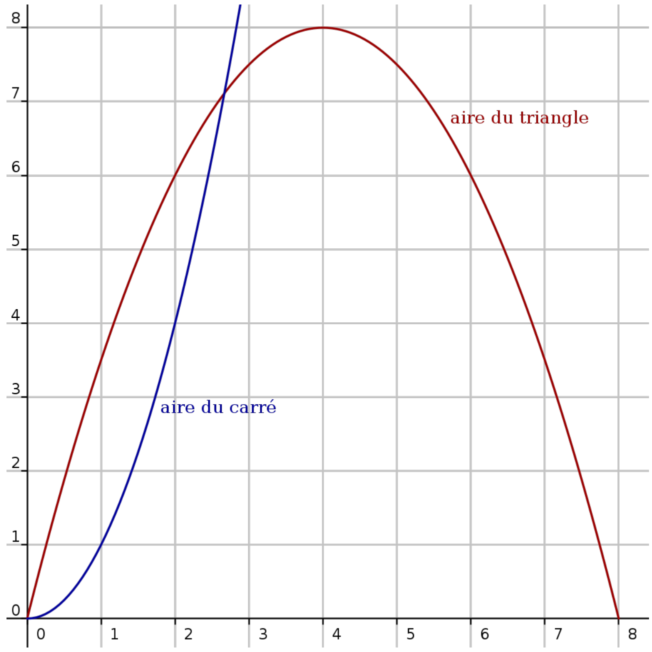
x	0	4	8
$s(x)$	0 ↗	8	↘ 0

9. A l'aide d'une représentation graphique, on détermine la valeur de x pour lesquelles les périmètres du carré et du triangle sont égaux : c'est l'abscisse du point d'intersection des deux courbes ci-contre : $x = 3{,}2$.
Ces périmètres sont de 12,8 cm.



Ce résultat peut être démontré de la façon suivante :
on cherche à résoudre l'équation $p(x) = q(x)$
équivaut à $4x = \sqrt{64-16x+5x^2} + 8 - x$
équivaut à $4x - 8 + x = \sqrt{64-16x+5x^2}$
équivaut à $5x - 8 = \sqrt{64-16x+5x^2}$
on élève au carré : $(5x-8)^2 = 5x^2 - 16x + 64$
on développe : $25x^2 - 80x + 64 = 5x^2 - 16x + 64$
on simplifie : $20x^2 - 64x = 0$
on factorise : $4x(5x - 16) = 0$
un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul : $4x = 0$ qui donne $x = 0$
ou $5x - 16 = 0$ qui donne $x = 3{,}2$.

10. L'aire du carré est inférieure ou égale à l'aire du triangle lorsque la courbe représentative de a est en-dessous de la courbe représentative de s, soit sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{8}{3}]$.



Point d'intersection des deux courbes : on résout l'équation $a(x) = s(x)$, soit $x^2 = \frac{-x^2+8x}{2}$;

on multiplie par 2 : $2x^2 = -x^2 + 8x$,
soit $3x^2 - 8x = 0$, soit $x(3x - 8) = 0$.
Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul :
$x = 0$ ou $3x - 8 = 0$ qui donne $x = \frac{8}{3}$.

11. a) et b) L'aire du carré est égale à la moitié de l'aire du triangle lorsque $a(x) = \frac{1}{2}\, s(x)$,

soit $x^2 = \frac{1}{2}\ \frac{-x^2+8x}{2}$,

soit $x^2 = \frac{-x^2+8x}{4}$; en multipliant par 4,

on obtient $4x^2 = -x^2 + 8x$,
soit $5x^2 - 8x = 0$,
soit $x(5x - 8) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul : $x = 0$ ou $5x - 8 = 0$ qui donne $x = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

Ainsi, l'aire du carré est égale à la moitié de l'aire du triangle lorsque $x = 0$, et dans ce cas, les aires sont nulles ; ou lorsque $x = 1{,}6$ et l'aire du carré
vaut $a(1{,}6) = 2{,}56$ cm² et l'aire du triangle
vaut $s(1{,}6) = 5{,}12$ cm² .