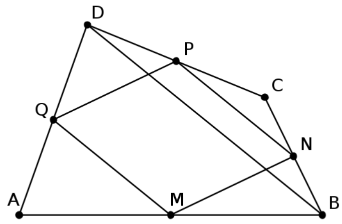
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3 SECONDE 502



EXERCICE 1 : On considère un quadrilatère ABCD quelconque comme ci-contre.
La figure avec les milieux respectifs M, N, P et Q des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. On considère le repère (A ; B, D).

a) Les coordonnées des points A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1), M(0,5 ; 0), Q(0 ; 0,5).

b) On note C(a ; b) où a et b sont des nombres réels.

Les coordonnées des points N($\frac{a+1}{2}$; $\frac{b}{2}$) et P($\frac{a}{2}$; $\frac{b+1}{2}$).

c) Si $x_M = x_N$, alors $\frac{a+1}{2}$ = 0,5 donc $a = 0$; dans ce cas, $x_P = x_Q$, et les droites (MN) et (PQ) sont toutes les deux parallèles à l'axe des ordonnées, donc elles sont parallèles.

Si $x_M \neq x_N$, le coefficient directeur de la droite (MN) est $\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M} = \frac{\frac{b}{2}-0}{\frac{a+1}{2}-0{,}5} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a+1-1}{2}} = \frac{b}{a}$;

et le coefficient directeur de la droite (PQ) est $\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q} = \frac{\frac{b+1}{2}-0{,}5}{\frac{a}{2}-0} = \frac{\frac{b+1-1}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{b}{a}$;

les droites ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

d) On sait que $x_M \neq x_Q$; le coefficient directeur de la droite (MQ) est $\frac{y_Q-y_M}{x_Q-x_M} = \frac{0{,}5-0}{0-0{,}5} = \frac{0{,}5}{-0{,}5} = -1$;

et le coefficient directeur de la droite (NP) est $\frac{y_N-y_P}{x_N-x_P} = \frac{\frac{b}{2}-\frac{b+1}{2}}{\frac{a+1}{2}-\frac{a}{2}} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$;

les droites ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

e) Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles ainsi que les droites (MQ) et (NP), donc le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

2. a) Dans le triangle ABD, M est le milieu de [AB] et Q est le milieu de [AD], donc par le théorème de la droite des milieux, les droites (MQ) et (BD) sont parallèles et MQ = $\frac{1}{2}$ BD.

b) Dans le triangle BCD, N est le milieu de [BC] et P est le milieu de [CD], donc par le théorème de la droite des milieux, les droites (BD) et (NP) sont parallèles et NP = $\frac{1}{2}$ BD.

c) Ainsi, (MQ) et (NP) sont parallèles puisque toutes les deux parallèles à (BD) et MQ = NP, donc MNPQ est un parallélogramme.

EXERCICE 2 : Dans un repère orthonormé (O ; I, J) du plan, placer les points A(10 ; 2), B(0 ; 2) et C(8 ; 6).

1. AB = $\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = \sqrt{(10-0)^2+(2-2)^2} = \sqrt{10^2+0^2} = \sqrt{100} = 10$;

AC = $\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2} = \sqrt{(10-8)^2+(2-6)^2} = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

CB = $\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(8-0)^2+(6-2)^2} = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

On a $AC^2 + CB^2 = 20 + 80 = 100 = AB^2$, donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en C est le milieu de son hypoténuse [AB].
Donc S(5 ; 2).

3. Le rayon du cercle circonscrit est égal à SA = $\frac{1}{2}$ AB = 5.

SD = $\sqrt{(x_S-x_D)^2+(y_S-y_D)^2} = \sqrt{(5-9)^2+(2-(-1))^2} = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$ = 5 = rayon du cercle, donc D est sur le cercle.

SE = $\sqrt{(x_S-x_E)^2+(y_S-y_E)^2} = \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$ = 5 = rayon du cercle, donc E est sur le cercle.

4. BD = $\sqrt{(x_B-x_D)^2+(y_B-y_D)^2} = \sqrt{(0-9)^2+(2-(-1))^2} = \sqrt{(-9)^2+3^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$;
EC = $\sqrt{(x_C-x_E)^2+(y_C-y_E)^2} = \sqrt{(8-1)^2+(6-5)^2} = \sqrt{7^2+(-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
BE = $\sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2} = \sqrt{(0-1)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$;
CD = $\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2} = \sqrt{(8-9)^2+(6-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2+7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
BC = $4\sqrt{5}$
ED = $\sqrt{(x_D-x_E)^2+(y_D-y_E)^2} = \sqrt{(9-1)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{8^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$;
Alors BD$\times$EC + BE$\times$CD = $3\sqrt{10}\times 5\sqrt{2} + \sqrt{10}\times 5\sqrt{2} = 20\sqrt{20} = 40\sqrt{5}$;
et BC$\times$ED = $4\sqrt{5}\times 10 = 40\sqrt{5}$.
5. Donc « Dans un quadrilatère dont les quatre sommets sont sur un même cercle, la somme des produits des longueurs des côtés opposés du quadrilatère est égale à au produit des longueurs des diagonales de ce quadrilatère ». Résultat dû à Ptolémée (2ème siècle de notre ère).