CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 5 SECONDE 502

EXERCICE 1 : L'inéquation $\dfrac{4-x}{x-1} \geqslant x$ équivaut à $\dfrac{4-x}{x-1} - x \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{4-x-x(x-1)}{x-1} \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{4-x-x^2+x}{x-1} \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{4-x^2}{x-1} \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{(2-x)(2+x)}{x-1} \geqslant 0$.

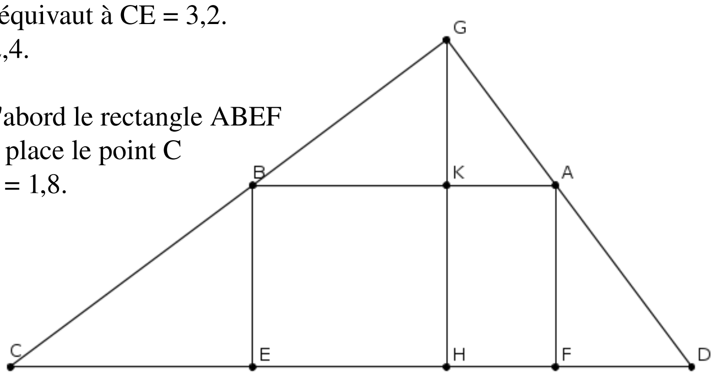
On réalise un tableau de signes :
$2 - x \geqslant 0$ pour $x \leqslant 2$;
$2 + x \geqslant 0$ pour $x \geqslant 2$;
$x - 1 \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$.

La solution est S =] – ∞; – 2[∪]1 ; 2].

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$2-x$		+		+		+	0	−	
$2+x$		−	0	+		+		+	
$x-1$		−		−	0	+		+	
Quotient		+	0	−	‖	+	0	−	

EXERCICE 2 : ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que AB = 4, BC = 4, CD = 9 et AD = 3.
On considère le rectangle ABEF où E et F sont sur la droite (CD).
1. Le triangle BCE est rectangle en E, donc $BC^2 = BE^2 + CE^2$, d'où $BE^2 = BC^2 - CE^2 = 16 - BE^2$.
Le triangle ADF est rectangle en F, donc $AD^2 = FD^2 + AF^2$;
de plus, AF = BE et FD = CD – CF = 9 – CE – EF = 5 – CE ; d'où $BE^2 = AF^2 = AD^2 - AF^2 = 9 - (5 - CE)^2$.
Ainsi $BE^2 = 16 - CE^2 = 9 - (5 - CE)^2$.

2. On résout l'équation $16 - CE^2 = 9 - (5 - CE)^2$ équivaut à $16 - CE^2 = 9 - (25 - 10CE + CE^2)$ équivaut à $16 - 9 = -25 + 10CE$ équivaut à $7 + 25 = 10CE$ équivaut à CE = 3,2.
D'où $BE^2 = 16 - CE^2 = 16 - 3{,}2^2 = 5{,}76$, et BE = 2,4.



3. Pour construire le trapèze ABCD, on construit d'abord le rectangle ABEF avec AB = 4 et BE = 2,4 puis sur la droite (EF) on place le point C tel que CE = 3,2 et le point D tel que FD = 5 – 3,2 = 1,8.

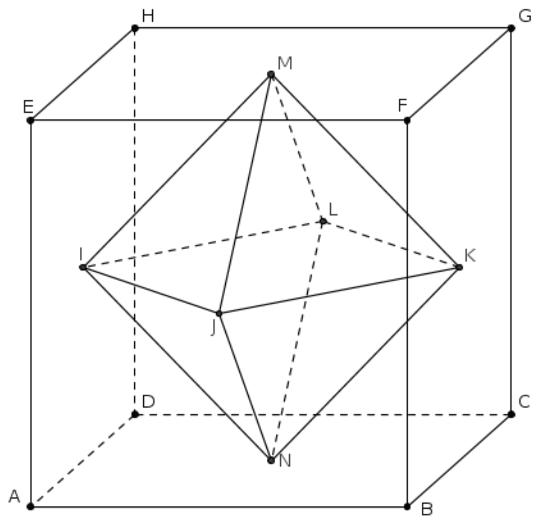
4. L'aire du trapèze est égale à
$\dfrac{(AB+CD)\times BE}{2} = \dfrac{(4+9)\times 2{,}4}{2} = 15{,}6$.

5. Les droites (AD) et (BC) se coupent en G.

a) Dans le triangle CDG, B est sur [CG], A est sur [DG] et la droite (AB) est parallèle à (CD) ;
on applique le théorème de Thalès : $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{GA}{GD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{4}{9}$; ainsi $\dfrac{GB}{GB+BC} = \dfrac{4}{9}$, d'où 4(GB + 4) = 9GB,
d'où 5GB = 16 et GB = 3,2.
De même $\dfrac{GA}{GD} = \dfrac{4}{9}$; ainsi $\dfrac{GA}{GA+AD} = \dfrac{4}{9}$, d'où 9GA = 4(GA + 3), d'où 5GA = 12 et GA = 2,4.

b) Soit H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle GCD.
Soit K le point d'intersection des segments [GH] et [AB]. On utilise le théorème de Thalès dans le triangle CGH avec B sur [CG], K sur [GH] et (BK) parallèle à (CH) :
$\dfrac{GH}{GK} = \dfrac{GC}{GB} = \dfrac{CH}{BK}$; ainsi $\dfrac{GH}{GH-BE} = \dfrac{4+3{,}2}{3{,}2} = \dfrac{7{,}2}{3{,}2}$, d'où 3,2GH = 7,2(GH – 2,4),
d'où 3,2GH = 7,2GH – 17,28, d'où 4GH = 17,28 d'où GH = 4,32.
On en déduit l'aire du triangle GCD égale à $\dfrac{CD\times GH}{2} = \dfrac{9\times 4{,}32}{2} = 19{,}44$.

EXERCICE 3 : Le cube ABCDEFGH ci-contre a pour arête 2 cm.



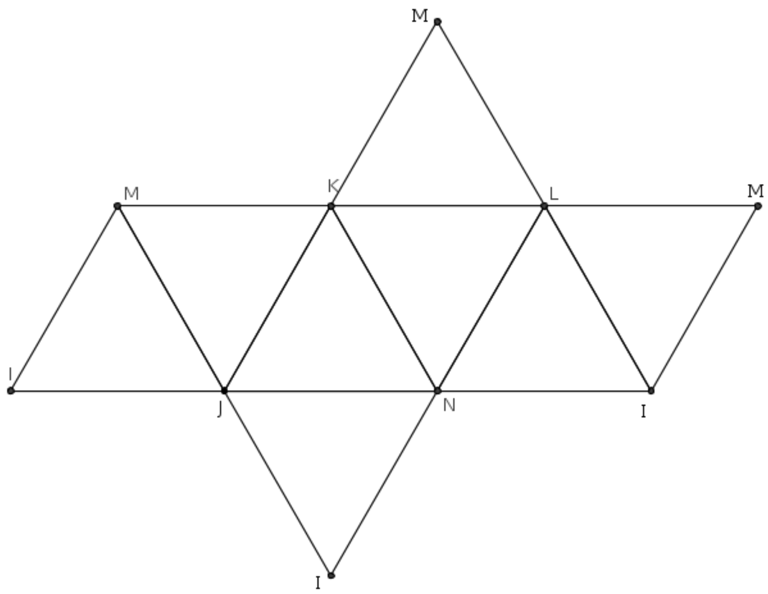
1. On place les points I, J, K, L, M, N centres des faces du cube :

2. Le point I est le milieu de la diagonale [AH] de la face ADHE et J est le milieu de la diagonale [AF] de la face ABFE. Dans le triangle AFH, la droite (IJ) est la droite passant par les milieux de deux côtés, donc par le théorème de la droite des milieux, (IJ) est parallèle à (HF) et IJ = $\frac{1}{2}$ HF.

On vérifie de même que JK = $\frac{1}{2}$ EG, KL = $\frac{1}{2}$ HF, IL = $\frac{1}{2}$ EG, IM = $\frac{1}{2}$ AF, etc... Les diagonales des faces du cube étant de même longueur, les arêtes de l'octaèdre IJKLMN sont donc toutes de la même longueur.

On a $HF^2 = EH^2 + EF^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, d'où HF = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; ainsi IJ = $\sqrt{2}$.

3. Le patron de l'octaèdre à l'échelle 2/1 :



4. L'octaèdre est composée de deux pyramides IJKLM et IJKLN de même volume. La hauteur d'une pyramide est égale à $\frac{1}{2}$ MN = 1. La base IJKL est un carré de côté $\sqrt{2}$. Donc le volume d'une pyramide est égale à $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 1}{3} = \frac{2}{3}$, et le volume de l'octaèdre IJKLMN est égale à $\frac{4}{3}$ cm^3 .