CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 8 SECONDE 502

On considère un pentagone ABCDE et les points I, J, K, L et M milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [AE].

1. Comme I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC], alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

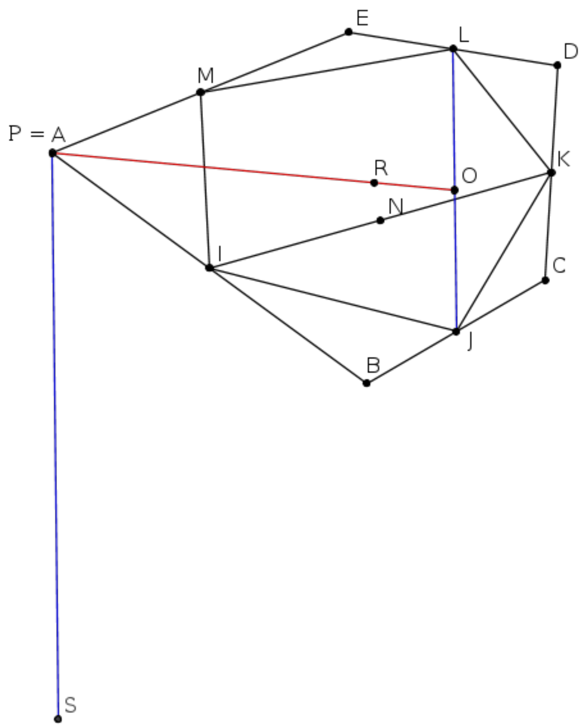
comme K est le milieu de [CD] et L est le milieu de [DE], alors $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$;

donc $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$ puisque M est le milieu de [AE].

2. On en déduit une construction du pentagone ABCDE à partir des milieux I, J, K, L et M : on construit le somme des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ à partir du point M qui donne le point E. Le point A est le symétrique de E par rapport à E. Le point B est le symétrique de A par rapport à I. Le point C est le symétrique de B par rapport à J. Le point D est le symétrique de C par rapport à K.

3. Soit N le milieu de [IK] et O le milieu de [JL].
Construction du point P défini par $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$:
La relation s'écrit $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$, soit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$;
On a $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 2\,\overrightarrow{OL}$;
d'où $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 2\,\overrightarrow{OJ} + 2\,\overrightarrow{OL} = 4\,\overrightarrow{OO} = \vec{0}$; donc P = A.

4. Construction du point R défini par $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{RE} = \vec{0}$.
On a $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{RE} = (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OE}) = 5\,\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 5\,\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$, d'où $5\,\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP}$ et
$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.



5. Construction du point S défini par
$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE}$.

On a $\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE} = 2\,\overrightarrow{SL}$; et $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 2\,\overrightarrow{SJ}$;
donc la relation $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE}$ devient
$\overrightarrow{SA} + 2\,\overrightarrow{SJ} = 2\,\overrightarrow{SL}$,
d'où $\overrightarrow{SA} = 2\,\overrightarrow{SL} - 2\,\overrightarrow{SJ} = 2(\overrightarrow{JS} + \overrightarrow{SL}) = 2\,\overrightarrow{JL}$
ou $\overrightarrow{AS} = 2\,\overrightarrow{LJ}$.