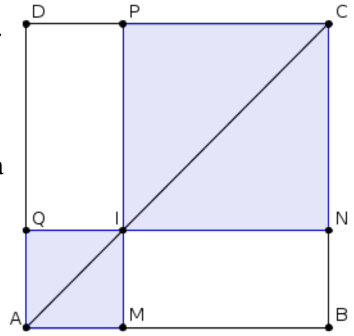
EXERCICE 1: On considère un carré ABCD de côté 8 cm et un point M sur [AB].
On construit les carrés AMIQ et CNIP comme sur la figure ci-contre.
On pose AM = x.



1. Le point M est sur [AB] de longueur 8 cm donc AM = $x \in [0\ ;\ 8]$.
2. Le carré AMIQ a pour côté x et le carré de côté CNIP a pour côté $8 - x$, d'où la somme des aires des carrés AMIQ et CNIP est égale à
$x^2 + (8 - x)^2 = x^2 + x^2 - 16x + 64 = 2x^2 - 16x + 64$.
Donc $A(x) = 2x^2 - 16x + 64$.
3. A est un polynôme du second degré avec $a = 2$, $b = -16$ et $c = 64$. $a > 0$, donc la parabole est tournée vers le haut.
L'abscisse du sommet est égale à $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-16)}{2\times 2} = 4$ et
l'ordonnée est $y_S = f(x_S) = f(4) = 2\times 4^2 - 16\times 4 + 64 = 32$; donc S(4 ; 32).
D'où le tableau de variations :

x	0		4		8
A(x)	64	↘	32	↗	64

Ainsi, le minimum de la somme des aires est égal à 32 cm² atteint en $x = 4$.
4. Le maximum de la somme des aires est égal à 64 cm² atteint en $x = 0$ et $x = 8$.
5. Pour déterminer x pour que la somme des aires soit égale à 40 cm², on résout l'équation $A(x) = 40$. On utilise la forme canonique de A : $A(x) = 2(x - 4)^2 + 32 = 40$ équivaut à $2(x - 4)^2 - 8 = 0$ équivaut à $(x - 4)^2 - 4 = 0$ équivaut à $(x - 4 - 2)(x - 4 + 2) = 0$ équivaut à $(x - 6)(x - 2) = 0$. Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul : $x - 6 = 0$ donne $x = 6$; $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.
Donc la somme des aires est égale à 40 cm², lorsque $x = 6$ ou $x = 2$.

EXERCICE 2 : On considère le polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 12x + 6$.
1. L'abscisse du sommet est égale à $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2\times(-3)} = -2$ et
l'ordonnée est $y_S = f(x_S) = f(-2) = -3\times(-2)^2 - 12\times(-2) + 6 = -12 + 24 + 6 = 18$; donc S(– 2 ; 18).
$a = -3 < 0$, donc la parabole est tournée vers le bas.
2. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↗	18	↘	

3. La forme canonique de la fonction f est $f(x) = -3(x + 2)^2 + 18$.

4. L'inéquation $f(x) \geqslant -9$ équivaut à $-3(x + 2)^2 + 18 \geqslant -9$ équivaut à
$-3(x + 2)^2 + 27 \geqslant 0$; on divise par -3 :
$(x + 2)^2 - 9 \leqslant 0$; on factorise en utilisant l'identité remarquable :
$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$:
$(x + 2 - 3)(x + 2 + 3) \leqslant 0$ équivaut à $(x - 1)(x + 5) \leqslant 0$.
On réalise un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi la solution est S = [– 5 ; 1].