

EXERCICE 1 : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points $A(-2; 1)$, $B(1; -1)$, $C(3; 2)$.

1. Les longueurs des côtés du triangle ABC :

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} ;$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} ;$$

$$CB = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} .$$

On a $AB = BC$; et $AB^2 + BC^2 = 13 + 13 = 26 = AC^2$, donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en C.

2. Soit R le milieu de [AC]. Les coordonnées de R sont $(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}) = (\frac{-2 + 3}{2} ; \frac{1 + 2}{2}) = (\frac{1}{2} ; \frac{3}{2})$.

3. Comme D est le symétrique de B par rapport à R, alors R est le milieu de [BD] ; donc $x_R = \frac{x_B + x_D}{2}$,

d'où $2x_R = x_B + x_D$, d'où $x_D = 2x_R - x_B = 1 - 1 = 0$; de même $y_D = 2y_R - y_B = 3 - (-1) = 4$; $D(0; 4)$.

Le point R est le milieu de [AC] et [BD], donc ABCD est un parallélogramme. De plus, $AB = BC$, donc c'est un losange, et l'angle en B est droit, donc c'est un carré.

4. a) Construction du point S tel que

$$\vec{RS} = \vec{RB} + \vec{RC} .$$

b) Coordonnées du vecteur $\vec{RS}$:

$$\vec{RB} (x_B - x_R ; y_B - y_R) = (\frac{1}{2} ; \frac{-5}{2}) = (0,5 ; -2,5) \text{ et}$$

$$\vec{RC} (x_C - x_R ; y_C - y_R) = (2,5 ; 0,5),$$

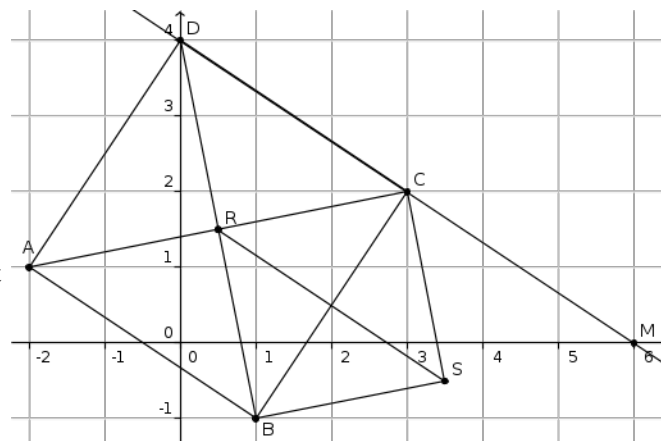
d'où $\vec{RS} (0,5 + 2,5 ; -2,5 + 0,5)$, soit $\vec{RS} (3 ; -2)$.

c) Comme $\vec{RS} (x_S - x_R ; y_S - y_R)$,

d'où $x_S - x_R = 3$, donc $x_S = 3 + 0,5 = 3,5$; et

$y_S - y_R = -2$, donc $y_S = -2 + 1,5 = -0,5$.

Ainsi $S(3,5 ; -0,5)$.



d) Comme $\vec{RS} = \vec{RB} + \vec{RC}$, on trouve $\vec{RC} = \vec{RS} - \vec{RB} = \vec{RS} + \vec{BR} = \vec{BS}$. Donc RBSC est un parallélogramme. De plus, les diagonales du carré ABCD sont de même longueur et perpendiculaires, donc $RB = RC$ et l'angle en R est droit ; donc RBSC est un carré.

5. Soit $(x; y)$ les coordonnées du point M. Comme M est sur l'axe des abscisses, alors $y = 0$; les vecteurs $\vec{CM} (x - 3 ; 0 - 2)$ et $\vec{AB} (3 ; -2)$ sont colinéaires, donc leurs coordonnées sont proportionnelles ; ainsi $-2(x - 3) - 3(-2) = 0$; d'où $-2x + 6 + 6 = 0$, soit $x = 6$. Donc $M(6; 0)$.

6. On considère le point $F(-20; -5)$. On a $\vec{AC} (5; 1)$ et $\vec{BF} (-21; -4)$;

Ainsi, $5 \times (-4) - 1 \times (-21) = -20 + 21 = 1 \neq 0$, donc les coordonnées des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BF}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AC) et (BF) ne sont pas parallèles.

EXERCICE 2 :

On considère un triangle ABC et les points I, J et K milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC].

Propositions	A	B	C
1. $\vec{AI} + \vec{BK} + \vec{CJ} =$	$\vec{0}$	$\vec{AC}$	$\vec{AB}$
2. $\vec{IJ} + \vec{IK} + \vec{JK} =$	$\vec{AB}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$
3. $\vec{AI} + \vec{AJ} =$	$\vec{AC}$	$\vec{AK}$	$\vec{AB}$
4. $\vec{AB} + \vec{AC} =$	$2 \vec{AJ}$	$2 \vec{AK}$	$2 \vec{AI}$

Réponses :

$$1 : \vec{0} \text{ car } \vec{AI} + \vec{BK} + \vec{CJ} = 0,5 \vec{AB} + 0,5 \vec{BC} + 0,5 \vec{CA} = 0,5(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = 0,5 \vec{AA} = \vec{0} .$$

$$2 : \vec{IJ} + \vec{IK} + \vec{JK} = 0,5 \vec{BC} + 0,5 \vec{AB} + 0,5 \vec{AC} = 0,5(\vec{BC} + \vec{AB} + \vec{AC}) = 0,5(2 \vec{AC}) = \vec{AC} .$$

$$3 : \vec{AI} + \vec{AJ} = 0,5 \vec{AB} + 0,5 \vec{AC} = 0,5(\vec{AB} + \vec{AC}) = 0,5(2 \vec{AK}) = \vec{AK} .$$

$$4 : \vec{AB} + \vec{AC} = 2 \vec{AK} \text{ car K est le milieu de [BC].}$$

EXERCICE 3 : On considère le triangle ABC ci-dessous.

1. Construction des points D, E, F

et G définis par $\vec{BE} = \frac{2}{3} \vec{BC}$,

$$\vec{AD} = \vec{AB} + 2 \vec{AC},$$

$$\vec{CF} = \frac{3}{2} \vec{CD} + \frac{3}{4} \vec{CA} \text{ et}$$

$$\vec{AG} = 2 \vec{CA} :$$

On munit le plan du repère

(A; $\vec{AB}$, $\vec{AC}$).

2. Les coordonnées des points de la figure : A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1).

$$\vec{AD} = \vec{AB} + 2 \vec{AC},$$

donc D(1 ; 2).

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} =$$

$$\vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{BC} =$$

$$\vec{AB} + \frac{2}{3} (\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{BA} + \frac{2}{3} \vec{AC} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC}, \text{ donc } E\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\vec{AF} = \vec{AC} + \vec{CF} = \vec{AC} + \frac{3}{2} \vec{CD} + \frac{3}{4} \vec{CA} = \vec{AC} + \frac{3}{2} (\vec{CA} + \vec{AD}) + \frac{3}{4} \vec{CA} =$$

$$\frac{-5}{4} \vec{AC} + \frac{3}{2} \vec{AB} + 3 \vec{AC} = \frac{7}{4} \vec{AC} + \frac{3}{2} \vec{AB}, \text{ donc } F\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right).$$

$$\vec{AG} = 2 \vec{CA} = -2 \vec{AC}, \text{ donc } G(0; -2).$$

3. $\vec{AE}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ et $\vec{AD}(1; 2)$, d'où $\vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AD}$, donc les vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaires et les points A, E et D sont alignés.

4. $\vec{AD}(1; 2)$ et $\vec{GF}\left(\frac{3}{2} - 0; \frac{7}{4} - (-2)\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right)$. Alors $1 \times \frac{15}{4} - 2 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4} - 3 = \frac{3}{4} \neq 0$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AD) et (GF) ne sont pas parallèles.

BONUS : Le point I est le milieu du segment [CD]. Coordonnées de I :

$$\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}\right) = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

$\vec{IF}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}; \frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right) = \left(1; \frac{1}{4}\right)$ et $\vec{AB}(1; 0)$. Alors $1 \times 0 - 1 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \neq 0$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (IF) et (AB) ne sont pas parallèles.

