CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3 SECONDE

Dans un repère (O ; I, J) orthonormé du plan, on considère les points A(– 2 ; – 4), B(8 ; 1), C(4 ; 4) et D(– 2 ; 1).

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-(-4)}{8-(-2)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$;

celui de la droite (CD) est $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{1-4}{-2-4} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}$;

ces coefficients directeurs sont égaux, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

De plus, AD = $\sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$;

et CB = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-8)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

Donc le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle, de côtés parallèles [AB] et [CD] et AD = BC.

2. Les coordonnées de E milieu de [AB] : $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+8}{2} = 3$ et $\dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+1}{2} = -1{,}5$; E(3 ; – 1,5).

Les coordonnées de F milieu de [CD] : $\dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $\dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{4+1}{2} = 2{,}5$; F(1 ; 2,5).

3. L'équation de la droite (AD) est de la forme $x = c$ car $x_A = x_D$ et $c = x_A = -2$: $x = -2$.

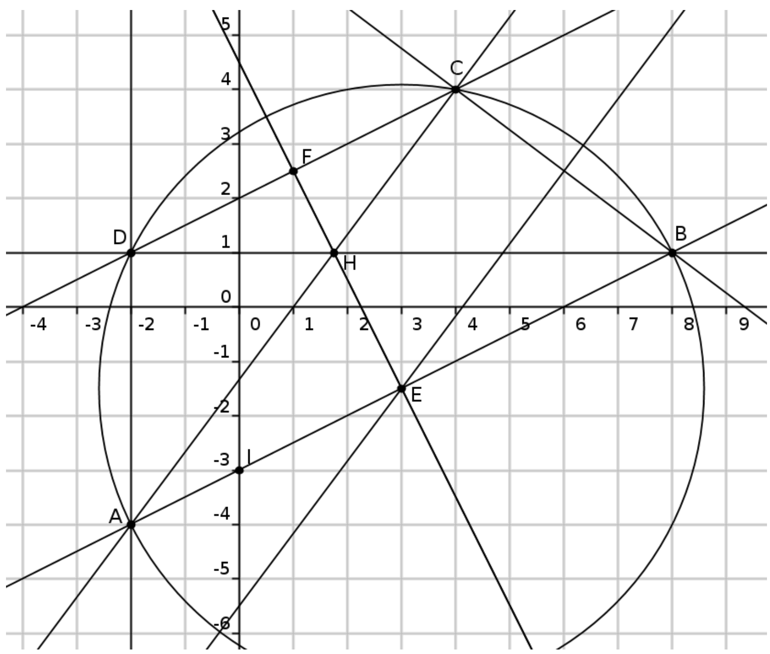
L'équation de la droite (BC) est de la forme $y = ax + b$ car $x_B \neq x_C$ et

$a = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{4-1}{4-8} = \dfrac{3}{-4} = \dfrac{-3}{4}$ et

b vérifie l'équation $y_B = ax_B + b$,

soit $1 = \dfrac{-3}{4} \times 8 + b$, soit $b = 1 + 6 = 7$.

D'où (BC) : $y = \dfrac{-3}{4}x + 7$.



4. Pour déterminer les coordonnées du point G, intersection de ces deux droites, on a $x = -2$ et $y = \dfrac{-3}{4} \times (-2) + 7 = 8{,}5$.

Donc G(– 2 ; 8,5).

5. L'équation de la droite (AC) est de la forme $y = ax + b$ car $x_A \neq x_C$ et

$a = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{4-(-4)}{4-(-2)} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ et b vérifie l'équation $y_A = ax_A + b$, soit $-4 = \dfrac{4}{3} \times (-2) + b$,

soit $b = -4 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{-4}{3}$. D'où (AC) : $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}$.

L'équation de la droite (BD) est de la forme $y = ax + b$ car $x_B \neq x_C$ et $a = \dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \dfrac{1-1}{-2-8} = 0$ et b vérifie l'équation $y_B = ax_B + b$, soit $1 = 0 \times 8 + b$, soit $b = 1$. D'où (BD) : $y = 1$.

Les coordonnées du point H, intersection des droites (AC) et (BD) vérifient $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}$ et $y = 1$, d'où l'équation

$\dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3} = 1$, soit $\dfrac{4}{3}x = \dfrac{4}{3} + 1$, soit $\dfrac{4}{3}x = \dfrac{7}{3}$, soit $x = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$. H$\left(\dfrac{7}{4} ; 1\right)$.

6. L'équation de la droite (EF) est de la forme $y = ax + b$ car $x_E \neq x_F$ et $a = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{2{,}5-(-1{,}5)}{1-3} = \dfrac{4}{-2} = -2$

et b vérifie l'équation $y_E = ax_E + b$, soit $-1{,}5 = -2 \times 3 + b$, soit $b = -1{,}5 + 6 = 4{,}5$. D'où (EF) : $y = -2x + 4{,}5$.

Vérifions que les points G et H sont sur la droite (EF) :

Pour G(– 2 ; 8,5) : $y = -2 \times (-2) + 4{,}5 = 8{,}5$, donc G est sur la droite (EF).

Pour H($\frac{7}{4}$; 1) : $y = -2\times\frac{7}{4} + 4{,}5 = -3{,}5 + 4{,}5 = 1$, donc H est sur (EF).

Ainsi, les points E, F, G et H sont alignés.

7. Les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre E et le rayon $2{,}5\sqrt{5}$. En effet :

EA = $\sqrt{(x_A-x_E)^2+(y_A-y_E)^2} = \sqrt{(-2-3)^2+(-4-(-1{,}5))^2} = \sqrt{(-5)^2+(-2{,}5)^2} = \sqrt{31{,}25} = 2{,}5\sqrt{5}$;

EB = $\sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2} = \sqrt{(8-3)^2+(1-(-1{,}5))^2} = \sqrt{5^2+2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25} = 2{,}5\sqrt{5}$;

EC = $\sqrt{(x_C-x_E)^2+(y_C-y_E)^2} = \sqrt{(4-3)^2+(4-(-1{,}5))^2} = \sqrt{1^2+5{,}5^2} = \sqrt{31{,}25} = 2{,}5\sqrt{5}$;

ED = $\sqrt{(x_D-x_E)^2+(y_D-y_E)^2} = \sqrt{(-2-3)^2+(-4-(-1{,}5))^2} = \sqrt{(-5)^2+(-2{,}5)^2} = \sqrt{31{,}25} = 2{,}5\sqrt{5}$;