

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan, on considère les points $A(-2; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(5; 4)$ et $D(3; 0)$.

1. $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$, soit $\overrightarrow{AB} (-1 - (-2); 3 - 1)$, soit $\overrightarrow{AB} (1; 2)$;
 $\overrightarrow{CD} (x_D - x_C; y_D - y_C)$, soit $\overrightarrow{CD} (3 - 5; 0 - 4)$, soit $\overrightarrow{CD} (-2; -4)$; Ainsi, $\overrightarrow{CD} = -2 \overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, mais pas égaux, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles et le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

2. $\overrightarrow{DA} (x_A - x_D; y_A - y_D)$, soit $\overrightarrow{DA} (-2 - 3; 1 - 0)$, soit $\overrightarrow{DA} (-5; 1)$; donc $2 \overrightarrow{DA} (-10; 2)$;
 $\overrightarrow{DE} (-10; 2)$; ainsi $x_E - x_D = -10$, d'où $x_E = -10 + x_D = -10 + 3 = -7$; $y_E - y_D = 2$, d'où $y_E = 2 + y_D = 2$;
 Et $E(-7; 2)$.

3. $\overrightarrow{BE} (-7 - (-1); 2 - 3)$, d'où $\overrightarrow{BE} (-6; -1)$ et $\overrightarrow{CE} (-7 - 5; 2 - 4)$, d'où $\overrightarrow{CE} (-12; -2)$.
 On a $\overrightarrow{CE} = 2 \overrightarrow{BE}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires, donc les points E , B et C sont alignés.

4. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

D'où $I(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$, soit $I(\frac{-3}{2}; 2)$ et $J(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2})$, soit $J(4; 2)$.

5. $\overrightarrow{IJ} (4 - (-1.5); 2 - 2)$, d'où $\overrightarrow{IJ} (5.5; 0)$ et $\overrightarrow{IE} (-7 - (-1.5); 2 - 2)$, d'où $\overrightarrow{IE} (-5.5; 0)$.
 On a $\overrightarrow{IE} = - \overrightarrow{IJ}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires et les points I , J et E sont alignés.

6. Pour trouver les coordonnées du point K intersection des diagonales de $ABCD$, on détermine les équations des droites (AC) et (BD) :

L'équation de (AC) est de la forme $y = ax + b$, avec $a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4 - 1}{5 - (-2)} = \frac{3}{7}$ et

$b = y_C - ax_C = 4 - \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{28 - 3 \times 5}{7} = \frac{13}{7}$; donc l'équation de la droite (AC) est $y = \frac{3}{7}x + \frac{13}{7} = \frac{3x + 13}{7}$.

L'équation de (BD) est de la forme $y = ax + b$, avec $a = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{3 - 0}{-1 - 3} = \frac{-3}{4}$ et

$b = y_B - ax_B = 3 - \frac{-3}{4}(-1) = \frac{3 \times 4 - 3}{4} = \frac{9}{4}$; donc l'équation de la droite (BD) est $y = \frac{-3}{4}x + \frac{9}{4} = \frac{-3x + 9}{4}$.

L'abscisse du point K vérifie l'équation $\frac{3x + 13}{7} = \frac{-3x + 9}{4}$ équivaut à $4(3x + 13) = 7(-3x + 9)$

équivaut à $12x + 52 = -21x + 63$ équivaut à $12x + 21x = 63 - 52$ équivaut à $33x = 11$ équivaut à $x = \frac{1}{3}$; et

$y = \frac{3 \times \frac{1}{3} + 13}{7} = \frac{14}{7} = 2$. Donc $K(\frac{1}{3}; 2)$. Le point K est sur la droite (IJ) si les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont

colinéaires: $\overrightarrow{IK} (\frac{1}{3} - (-1); 2 - 2)$, soit $\overrightarrow{IK} (\frac{4}{3}; 0)$; on sait que $\overrightarrow{IJ} (5.5; 0)$; donc $\frac{4}{3} \times 0 - 0 \times 5.5 = 0$, donc les vecteurs sont colinéaires et K est sur la droite (IJ) .

7. Construction du point P défini par $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}$.

On a $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OD} = 3 \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ ayant pour coordonnées
 $(-1; -6) + (-2; 1) + (-1; 3) + (5; 4) + D(3; 0) = (4; 2)$.

Donc $P(4; 2)$. En fait $P = J$.

8. Construction du point R défini par $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} = \vec{0}$.

On peut écrire $\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$,

donc $4 \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$; d'où $4 \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ ayant pour coordonnées $(-2 ; 1) + (-1 ; 3) + (5 ; 4) + D(3 ; 0) = (5 ; 8)$. Donc $\overrightarrow{OR} (1,25 ; 2)$ et $R(1,25 ; 2)$.

