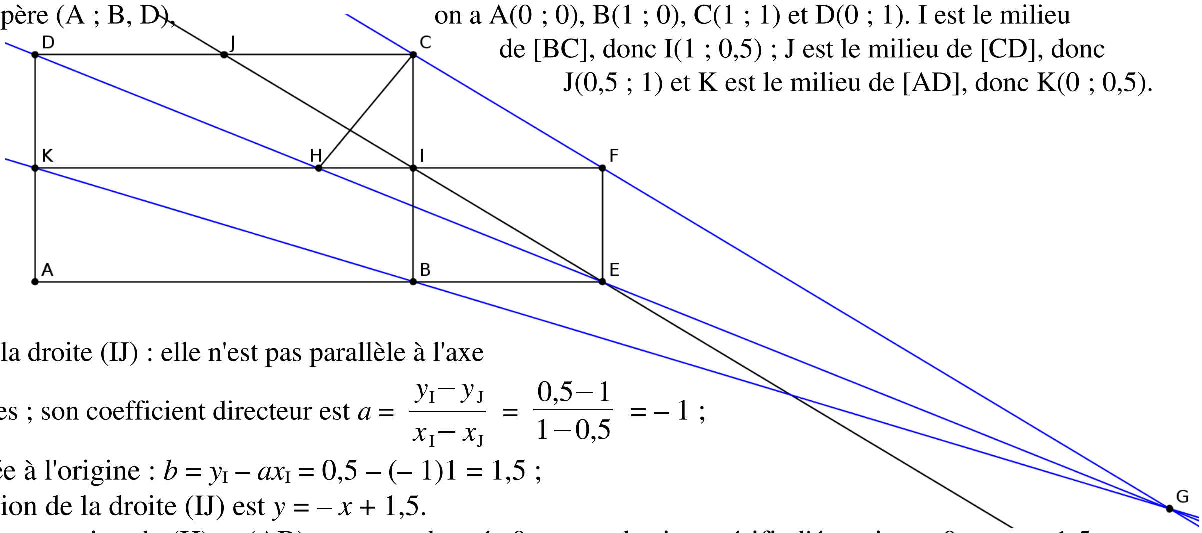
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4 SECONDE

On considère le rectangle ABCD ci-dessous, I le milieu de [BC], J le milieu de [CD] et K le milieu de [AD].
La droite (IJ) coupe la droite (AB) en E. On construit alors le rectangle BEFI.
Partie 1 : Le but de cette partie est de montrer que les droites (CF), (DE) et (KB) sont concourantes en un point G.
1. Dans le repère (A ; B, D), on a A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1) et D(0 ; 1). I est le milieu de [BC], donc I(1 ; 0,5) ; J est le milieu de [CD], donc J(0,5 ; 1) et K est le milieu de [AD], donc K(0 ; 0,5).



Équation de la droite (IJ) : elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; son coefficient directeur est $a = \dfrac{y_I - y_J}{x_I - x_J} = \dfrac{0{,}5-1}{1-0{,}5} = -1$;
son ordonnée à l'origine : $b = y_I - ax_I = 0{,}5 - (-1)1 = 1{,}5$;
donc l'équation de la droite (IJ) est $y = -x + 1{,}5$.
Le point E intersection de (IJ) et (AB) a pour ordonnée 0 et son abscisse vérifie l'équation : $0 = -x + 1{,}5$, soit $x = 1{,}5$. Donc E(1,5 ; 0). Et F(1,5 ; 0,5).
Équation de la droite (CF) : elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; son coefficient directeur est
$a = \dfrac{y_C - y_F}{x_C - x_F} = \dfrac{1-0{,}5}{1-1{,}5} = -1$; son ordonnée à l'origine : $b = y_C - ax_C = 1 - (-1)1 = 2$;
donc l'équation de la droite (CF) est $y = -x + 2$.
Équation de la droite (DE) : elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; son coefficient directeur est
$a = \dfrac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \dfrac{1-0}{0-1{,}5} = \dfrac{-2}{3}$; son ordonnée à l'origine : $b = y_D - ax_D = 1 - \dfrac{-2}{3}0 = 1$;
donc l'équation de la droite (DE) est $y = \dfrac{-2}{3}x + 1$.
2. Pour déterminer les coordonnées du point G intersection de ces deux droites, on résout l'équation
$-x + 2 = \dfrac{-2}{3}x + 1$ équivaut à $-x + \dfrac{2}{3}x = 1 - 2$ équivaut à $\dfrac{-1}{3}x = -1$ équivaut à $x = 3$;
l'ordonnée est $y = -3 + 2 = -1$. Donc G(3 ; – 1).
3. Équation de la droite (KB) : elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; son coefficient directeur est
$a = \dfrac{y_B - y_K}{x_B - x_K} = \dfrac{0-0{,}5}{1-0} = \dfrac{-1}{2}$; son ordonnée à l'origine : $b = y_B - ax_B = 0 - \dfrac{-1}{2}1 = \dfrac{1}{2}$;
donc l'équation de la droite (KB) est $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. On a $\dfrac{-1}{2}x_G + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{2}3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1 = y_G$, donc les coordonnées de G vérifient l'équation de la droite (KB), donc G est sur la droite (KB).
Partie 2 : On suppose maintenant que AB = 5 et AD = 3 ; les droites (DE) et (KI) se coupent en H.
On considère le repère orthonormé (A, M, N) tel que M est sur [AB] et AM = 1, N est sur [AD] et AN = 1.
Dans ce cas, B(5 ; 0), D(0 ; 3), K(0 ; 1,5), I(5 ; 1,5)et E(7,5 ; 0).
L'équation de la droite (DE) : elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; son coefficient directeur est
$a = \dfrac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \dfrac{3-0}{0-7{,}5} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$; son ordonnée à l'origine : $b = y_D - ax_D = 3 - 0{,}4 \times 0 = 3$;
donc l'équation de la droite (DE) est $y = 0{,}4x + 3$.
L'équation de la droite (KI) : elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; son coefficient directeur est
$a = \dfrac{y_I - y_K}{x_I - x_K} = \dfrac{1{,}5-1{,}5}{5-0} = 0$; son ordonnée à l'origine : $b = y_I - ax_I = 1{,}5 - 0 \times 5 = 1{,}5$;
donc l'équation de la droite (DE) est $y = 1{,}5$. Les coordonnées du point d'intersection de (DE) et (KI) vérifie $y = 0{,}4x + 3$ et $y = 1{,}5$; d'où $0{,}4x + 3 = 1{,}5$ soit $0{,}4x = -1{,}5$ soit $x = -3{,}75$. Donc H(– 3,75 ; 1,5).
Donc CH = $\sqrt{(x_H - x_C)^2 + (y_H - y_C)^2} = \sqrt{(-3{,}75-5)^2 + (1{,}5-3)^2} = \sqrt{76{,}5625+2{,}25} = \sqrt{78{,}8125}$.