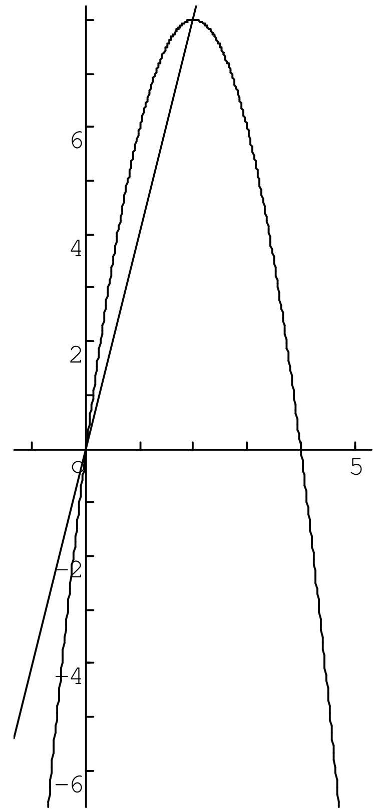
PARTIE 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ par $f(x) = 8x - 2x^2$.

a) Tableau de valeurs pour la fonction f :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-10	0	6	8	6	0	-10

b) Représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé :



c) Soient les réels a et b de l'intervalle $[2 ; 5]$, avec $a < b$;
on a $f(a) - f(b) = 8a - 2a^2 - (8b - b^2) = 8(a - b) - 2(a^2 - b^2) = 2(a - b)(4 - (a + b))$; comme a et b sont supérieurs à 2, on a $a + b > 4$, donc $4 - (a + b) < 0$; de plus, $a - b < 0$, donc $f(a) - f(b) > 0$, donc a $f(a) > f(b)$; la fonction f ne conserve pas l'ordre des nombres, donc elle est décroissante sur l'intervalle $[2 ; 5]$.
Soient les réels a et b de l'intervalle $[-1 ; 2]$, avec $a < b$;
on a $f(a) - f(b) = 8a - 2a^2 - (8b - b^2) = 8(a - b) - 2(a^2 - b^2) = 2(a - b)(4 - (a + b))$; comme a et b sont inférieurs à 2, on a $a + b < 4$, donc $4 - (a + b) > 0$; de plus, $a - b < 0$, donc $f(a) - f(b) < 0$, donc a $f(a) < f(b)$; la fonction f conserve l'ordre des nombres, donc elle est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

d) Tableau de variations de la fonction f sur $[-1 ; 5]$:

x	-1		2		5
$f(x)$			8		
	-10	↗		↘	-10

e) On peut résoudre l'équation $f(x) = 0$ graphiquement en cherchant les antécédents de 0 par f ; on trouve 0 et 4. On peut aussi résoudre cette équation algébriquement :
$8x - 2x^2 = 0$; on factorise : $2x(4 - x) = 0$; un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul : d'où $x = 0$ ou $x = 4$.

f) Représentation de la fonction g définie sur le même intervalle par $g(x) = 4x$ sur le même graphique.

g) Par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes sont $(0 ; 0)$ et $(2 ; 8)$.

h) Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes, soit 0 et 2.
On peut aussi résoudre cette équation algébriquement : $8x - 2x^2 = 4x$; d'où $2x^2 - 4x = 0$ on factorise : $2x(x - 2) = 0$; un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul : d'où $x = 0$ ou $x = 2$.

PARTIE 2

a) On a (AB) = (AN) parallèle à (MP) et (AC) = (AM) parallèle à (PN) ; de plus, l'angle MAN est droit, donc le quadrilatère AMPN est un rectangle.

b) On utilise le théorème de Thalès dans le triangle ABC, avec (MP) // (AB) pour calculer AN : $\frac{CM}{CA} = \frac{MP}{AB}$, d'où

$MP = \frac{AB \times CM}{AC} = 2(4 - x)$; l'aire du rectangle AMPN est égale AM x MP = $x(2(4 - x)) = f(x) = 8x - 2x^2$.

c) Comme l'aire $= f(x)$, l'aire maximale du rectangle est le maximum de f soit 8 atteint pour $x = 2$.

d) L'aire du triangle AMB est égale à AM x AB / 2 = $4x = g(x)$. Donc l'aire de AMB égale l'aire du rectangle AMPN si $f(x) = g(x)$; donc pour $x = 2$ ou $x = 0$. Ainsi, les positions du point M pour que l'aire de AMB soit égale à l'aire du rectangle AMPN sont M = A ou M milieu de [AC].