

EXERCICE 1 :

a) On compare l'expression à 0 : $4x^2 - 18 - 7 = 0$; soit $4x^2 - 25 = 0$; on factorise l'expression en utilisant l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; on obtient : $(2x + 5)(2x - 5) = 0$; un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul : soit $2x + 5 = 0$, soit $2x - 5 = 0$; on obtient les solutions : $5/2$ et $-5/2$.

b) On factorise l'expression : $(x - 2) [3(2x + 3) - (8x - 5)] = 0$; d'où : $(x - 2) (-2x + 14) = 0$; un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul : soit $x - 2 = 0$, soit $-2x + 14 = 0$; on obtient les solutions : 2 et 7 .

c) On compare l'expression à 0 : $(x + 3)^2 - (4x - 5)^2 > 0$; on factorise l'expression en utilisant l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; on obtient : $[(x + 3) + (4x - 5)][(x + 3) - (4x - 5)] = 0$; soit $(5x - 2)(-3x + 8) > 0$; on réalise un tableau de signes en cherchant les valeurs de x qui annulent les facteurs :
 $(5x - 2) = 0$ pour $x = 2/5$ et $(-3x + 8) = 0$ pour $x = 8/3$.

x	$-\infty$	$2/5$	$8/3$	$+\infty$
Signe de $(5x - 2)$		-	0	+
Signe de $(-3x + 8)$	+	+	0	-
Signe du produit	-	0	+	-

Le produit doit être strictement positif, donc la solution est $] 2/5 ; 8/3 [$.

EXERCICE 2 : Dans un triangle rectangle, le côté de plus grande longueur est l'hypoténuse ; les longueurs de ce triangle doivent vérifier le théorème de Pythagore : $x^2 + (x - 4)^2 = (x + 4)^2$. En développant ces expressions, on obtient : $x^2 + x^2 - 8x + 16 = x^2 + 8x + 16$, et en simplifiant, il reste $x^2 - 16x = 0$; d'où la factorisation : $x(x - 16) = 0$; un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul : $x = 0$ ou $x - 16 = 0$; la solution $x = 0$ est impossible (puisque un des côté du triangle mesure $x - 4$) . Donc ce triangle est rectangle si $x = 16$. On vérifie que $x - 4 = 12$, $x + 4 = 20$ et $12^2 + 16^2 = 20^2$.

EXERCICE 3 :

a) Dans l'espace, deux plans peuvent être parallèles ou sécants (et dans ce dernier cas, ils peuvent être perpendiculaires).

Un exemple de chaque en utilisant le cube : les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles ; les plans (BCE) et (BCF) sont sécants ; les plans (ABC) et (EDA) sont perpendiculaires.

b) Un exemple de deux droites non coplanaires dans le cube : (AB) et (FG).

c) Les arêtes de ce tétraèdre sont des diagonales de faces du cube, donc elles ont toutes la même longueur . Les faces de ce tétraèdre sont des triangles équilatéraux .

d) On se place dans le triangle EGB où I est le milieu de [EG] et J est le milieu de [BG]. D'après le théorème de la droite des milieux, $IJ = \frac{1}{2} EG$. Calculons la longueur EG en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle EFG rectangle en F : $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, donc $EG = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Donc $IJ = 2\sqrt{2}$. Le triangle DIJ est isocèle en D : pour le montrer, on calcule les longueurs des côtés DI et DJ : les points I et J sont des centres de faces du cube ; dans le triangle DHI rectangle en H, on $DH = 4$, $HI = \frac{1}{2} HF = 2\sqrt{2}$. On applique Pythagore : $DI^2 = DH^2 + HI^2 = 16 + 8 = 24$, donc $DI = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Dans le triangle DBJ rectangle en B, on $DB = 4$, $BJ = \frac{1}{2} BG = 2\sqrt{2}$. On applique Pythagore : $DJ^2 = DB^2 + BJ^2 = 16 + 8 = 24$, donc $DJ = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Ainsi, DIJ est bien isocèle en D.

Question subsidiaire : Pour calculer l'aire du triangle DIJ, il faut calculer la hauteur issue du sommet D, qui coupe IJ en son milieu S (puisque DIJ est isocèle en D). (DS) est aussi une hauteur du triangle DIJ ; on applique le théorème de Pythagore dans le triangle DIS rectangle en S : $DS^2 = DI^2 - IS^2 = 24 - 2 = 22$; donc $DS = \sqrt{22}$. L'aire du triangle DIJ est égale à

$$(IJ \times DS)/2 = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{22}}{2} = 2\sqrt{11} .$$

