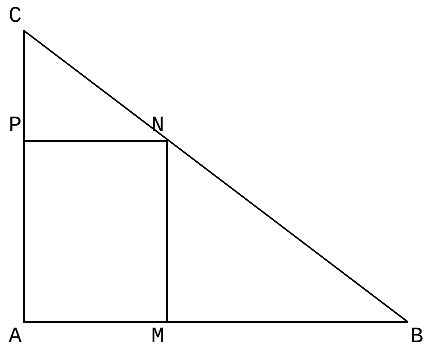
CORRECTION DEVOIR MAISON N° 4 SECONDE 11 ET 12

A. Rectangle variable dans un triangle:



1. La figure ci-contre :
2. Le triangle ABC étant rectangle en A, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires; les droites (AB) et (MN) sont perpendiculaires; on utilise la propriété : si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre ; donc (MN) et (AC) sont parallèles. Les droites (NP) et (AC) sont perpendiculaires, donc les droites (NP) et (AB) sont parallèles. Ainsi, le quadrilatère MNPA a ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme. De plus, il possède un angle droit en A, donc c'est un rectangle.
3. On utilise le théorème de Thalès dans le triangle ABC, où M est sur [AB], N est sur [BC] et (MN) est parallèle à (AC) : donc BM/BA = BN/BC = MN/AC ; on a AM = x et AB = 8, donc BM = 8 – x ;

ainsi MN = $\frac{BM*AC}{BA} = \frac{6(8-x)}{8} = \frac{3(8-x)}{4}$.

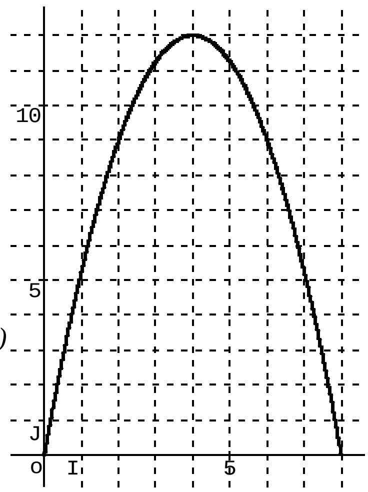
4. L'aire *a(x)* du rectangle MNPA est égale à MN*AM = $\frac{3(8-x)}{4}\,x = \frac{3x(8-x)}{4} = \frac{-3x^2}{4} + 6x$.
5. L'ensemble de définition de cette fonction *a* correspond aux valeurs de x possibles; comme le point M est sur le segment [AB], alors $x \in [0 ; 8]$.

B. Recherche de l'aire maximale de ce rectangle :

1. Le tableau de valeurs de la fonction *a* sur l'intervalle [0; 8] est le suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a(x)$	0	5,25	9	11,25	12	11,25	9	5,25	0

2. La représentation graphique ci-contre :



3. D'après le tableau de valeurs, le maximum de l'aire *a(x)* semble être 12, atteint pour x = 4 .
4. Le tableau de variations de la fonction *a* sur l'intervalle [0; 8] :

x	0	4	8
$a(x)$	0 ↗	12	↘ 0

5. On a $12 - \frac{3}{4}(x-4)^2 = 12 - \frac{3(x^2-8x+16)}{4} = \frac{48-3x^2+24x-48}{4} = \frac{-3x^2+24x}{4} = \frac{-3x^2}{4} + 6x$ .Donc l'aire *a(x)* peut s'écrire $12 - \frac{3}{4}(x-4)^2$. Un carré étant toujours positif, cette quantité est inférieure ou égale à 12, donc $a(x) \le 12$;

on peut écrire : $(x - 4)^2 \ge 0$, donc $-\frac{3}{4}(x-4)^2 \le 0$, puis $12 - \frac{3}{4}(x-4)^2 \le 12$; et la conjecture de la question B.3 est vérifiée.

6. Lorsque l'aire est maximale, AM = 4 = AB/2 ; donc le point M est le milieu de [AB] .

7. L'aire du triangle ABC est égale à AB×AC/2 = (8×6)/2 = 24 ; le tiers de cette aire est 24/3 = 8 ; A l'aide de la représentation graphique de la fonction *a* , on détermine les antécédents de 8 par la fonction *a* : environ 1,7 et 6,3 ; des valeurs approchées de la distance AM telle que l'aire du rectangle MNPA soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC sont 1,7 et 6,3.