Baccalauréat S Pondichéry 2008 Corrigé

Exercice 1

1. a) La fonction f est définie si $e^x - 1 \neq 0$, soit $e^x \neq 1$, soit $x \neq 0$. Donc f est bien définie sur $[1; +\infty[$.
La fonction H est définie sur $[1; +\infty[$ comme primitive de la fonction f sur $[1; +\infty[$.
b) La fonction H est la primitive de la fonction f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en 1.
c) On sait que pour tout réel $x > 0$, $e^x > 1$, donc $f(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$. Ainsi, le nombre H(3) est l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

2. a) Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{x}{e^x(1-e^{-x})} = \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = x\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

b) On utilise une intégration par parties, avec $u(x) = x$ $u'(x) = 1$;

et $v'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ de la forme $\dfrac{w'}{w}$ avec $w(x) > 0$, d'où $v(x) = \ln(1 - e^{-x})$;

Alors $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \left[x\ln(1-e^{-x})\right]_1^3 - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx = 3\ln(1-e^{-3}) - \ln(1-e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx =$

$\displaystyle 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e^1}\right) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx$.

c) Pour tout réel x tel que $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $-1 \geqslant -x \geqslant -3$, puis $e^{-1} \geqslant e^{-x} \geqslant e^{-3}$,
puis $1 - e^{-1} \leqslant 1 - e^{-x} \leqslant 1 - e^{-1}$, puis $\ln(1-e^{-x}) \leqslant \ln(1-e^{-x}) \leqslant \ln(1-e^{-3})$, puis

$\ln\left(1-\dfrac{1}{e^1}\right) \leqslant \ln(1-e^{-x}) \leqslant \ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

d) On utilise la propriété : Si $m \leqslant f(x) \leqslant$ M sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

Ainsi $2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^1}\right) \leqslant \displaystyle\int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx \leqslant 2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$. D'où $-2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^1}\right) \geqslant -\displaystyle\int_1^3 \ln(1-e^{-x})dx \geqslant -2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$,

puis $3\ln(1-e^{-3}) - \ln(1-e^{-1}) - 2\ln(1-e^{-1}) \geqslant \displaystyle\int_1^3 f(x)dx \geqslant 3\ln(1-e^{-3}) - \ln(1-e^{-1}) - 2\ln(1-e^{-3})$.

D'où $\ln(1-e^{-3}) - \ln(1-e^{-1}) \leqslant$ H(3) $\leqslant 3\ln(1-e^{-3}) - 3\ln(1-e^{-1})$, après simplification :
$\ln(1+e^{-1}+e^{-2}) \leqslant$ H(3) $\leqslant 3\ln(1+e^{-1}+e^{-2})$; on obtient $0{,}3428 \leqslant$ H(3) $\leqslant 1{,}0285$.

Exercice 2

Partie A : r(M) = M' est équivalent à $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$ et $\Omega M = \Omega M'$.

Si $M \neq \Omega$, alors $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$ et $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$; d'après le a), $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1$ et $arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \alpha\ [2\pi]$.

D'après le b), $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\alpha}$, soit $z'-\omega = e^{i\alpha}(z-\omega)$.

Partie B : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$. Et $\arg(z_A) = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$, $\arg(z_B) = \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi]$, $\arg(z_C) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$,

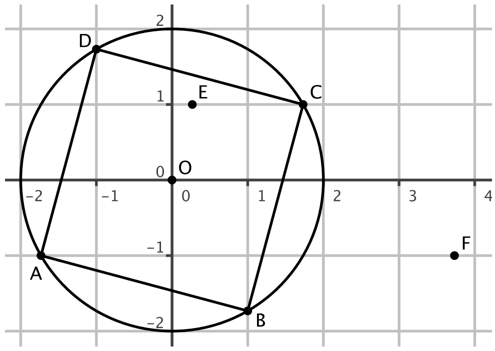
$\arg(z_D) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

b) Pour construire à la règle et au compas les points A, B, C et D, on trace le cercle de centre O et de rayon 2; les quatre points sont sur ce cercle; une des coordonnées de ces points est 1 ou – 1, il suffit d'utiliser des droites parallèles aux axes pour placer ces points.

ABCD est un carré : Le milieu de [AC] est O car $\dfrac{z_A+z_C}{2} = 0$, et le milieu de [BD] est aussi le point O.

de plus AC = $|z_C - z_A| = |2\sqrt{3}+2i| = 4 = |z_D - z_B|$ = BD.

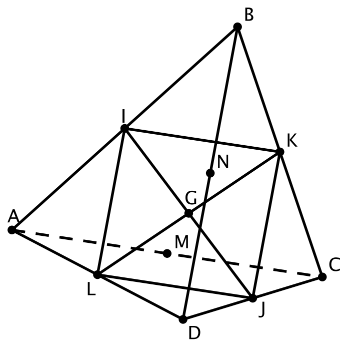
$(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{BD}) = arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = arg\left(\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2i}\right) = arg\left(\frac{(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Donc les diagonales de ABCD ont le même milieu, sont de même longueurs et perpendiculaires, donc ABCD est un carré.



2. a) Les triangles BAE et BCF sont équilatéraux de sens indirect.
b) L'écriture complexe de r est $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B)$,
soit $z' - 1 + i\sqrt{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - 1 + i\sqrt{3})$.
c) E = r(A), donc $z_E - 1 + i\sqrt{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A - 1 + i\sqrt{3})$, soit
$z_E = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i - 1 + i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3}$,
et on trouve $z_E = 2 - \sqrt{3} + i$.

Exercice 3

1. On sait que G est l'isobarycentre des points A, B, C et D; donc G = bar{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)} = bar{(I; 2), (J; 2)} = bar{(K; 2), (L; 2)} = bar{(M; 2), (N; 2)}. Donc G est le milieu des segments [IJ], [KL] et [MN], donc les trois droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.



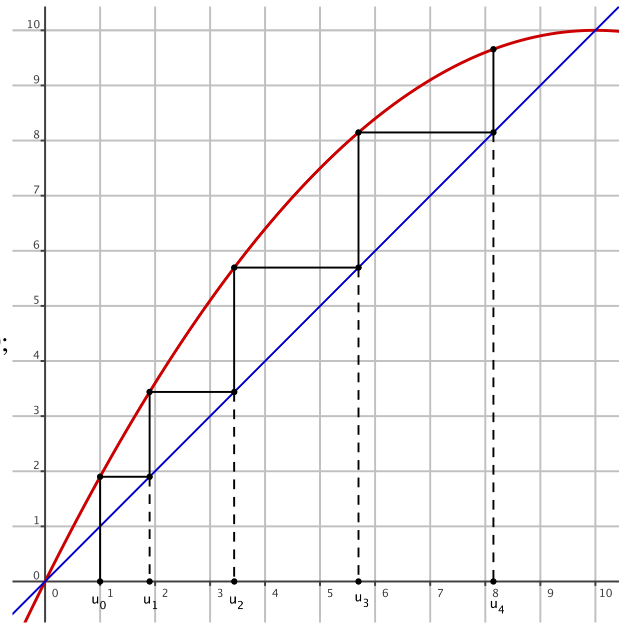
2. a) Par le théorème de la droite des milieux: dans le triangle ABC, on a IK= $\frac{1}{2}$ AC; dans le triangle ACD, JL= $\frac{1}{2}$ AC, donc IK = JL;
de même on montre que IL = $\frac{1}{2}$ BD = KJ; or AC = BD, donc IK = JL = IL = KJ, donc IKJL est un losange.
Pour les mêmes raisons, les quadrilatères IMJN et KNLM sont des losanges.
b) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc (IJ) et (KL) sont orthogonales.
3. a) Le point L est dans le plan (MKN) puisque KNLM est un losange. On sait que (IJ) est orthogonale à (KL) et (IJ) est orthogonale à (MN); donc (IJ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (MKN) donc (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
b) Ainsi (IJ) est orthogonale à toutes les droites du plan (MKN) donc à (MK). Donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$.
On sait que $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; donc (IJ) et (AB) sont orthogonales.
De même, $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$. On sait que $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$; donc (IJ) et (CD) sont orthogonales.
c) La droite (IJ) est orthogonale à (AB) et passe par son milieu I, donc cette droite est contenue dans le plan médiateur de [AB]. Comme G es le milieu de [IJ], G appartient au plan médiateur de [AB].
La droite (IJ) est orthogonale à (CD) et passe par son milieu J, donc cette droite est contenue dans le plan médiateur de [CD]. Comme G est le milieu de [IJ], G appartient au plan médiateur de [CD].
d) Par la question 3. c), GA = GB et GC = GD.
De plus, la droite (KL) est orthogonale aux droites (IJ) et (MN), donc la droite (KL) est orthogonale au plan (MJN), donc $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$. Comme $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$; donc (KL) et (BC) sont orthogonales. La droite (KL) est alors dans le plan médiateur de [BC], et comme G est le milieu de [KL], G appartient au plan médiateur de [BC], donc GB = BC.
On a ainsi démontré que GA = GB = GC = GD, donc G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Exercice 4 : Partie A: 1. a) La fonction f est dérivable sur [0; 20] car c'est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et $f'(x) = \frac{-1}{5}x + 2$ qui s'annule pour $x = 10$. La fonction f est strictement croissante sur [0; 10] et strictement décroissante sur [10; 20].
b) De plus, $f(0) = 0$ et $f(10) = 10$; donc la fonction f réalise une bijection (elle est continue et strictement croissante) de [0; 10] dans [0; 10]. Ainsi si $x \in [0; 10]$, alors $f(x) \in [0; 10]$.
c) Représentation graphique des premiers termes de la suite ci-dessous.
2. Initialisation : On sait que $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{10}(20 - 1) = \frac{19}{10} = 1{,}9$; donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$.
Hérédité : On suppose que pour un n , $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$:
On sait que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$. Donc, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$ entraîne $0 \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant 10$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.
Donc pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par 10, donc elle converge. Sa limite l vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, donc $f(l) = l$, soit $\frac{l}{10}(20 - l) = l$, soit $l(20 - l) = 10l$, soit $l^2 - 10l = 0$, soit $l(l - 10) = 0$. Les solutions de cette équation sont 0 et 10. La limite de (u_n) ne peut pas être 0, donc $l = 10$.

Partie B : 1. a) On a $z = \frac{1}{y}$, soit $y = \frac{1}{z}$ donc $y' = \frac{-z'}{z^2}$. Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si $y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$ si et seulement si $\frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{20}\frac{1}{z}(10 - \frac{1}{z})$ si et seulement si $\frac{-z'}{z^2} = \frac{10z-1}{20z^2}$ si et seulement si $-z' = \frac{10z-1}{20}$ si et seulement si $z' = \frac{-1}{2}z + \frac{1}{20}$ si et seulement si z solution de (E_1).
b) Les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = k\,e^{\frac{-x}{2}} + \frac{1}{10}$.

Et les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $\frac{1}{f_k(x)} = \frac{1}{k e^{\frac{-x}{2}} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{10 k e^{\frac{-x}{2}} + 1}$.

2. On sait que g est solution de (E) et que $g(0) = 1$, donc $g(x) = \frac{10}{10 k e^{\frac{-x}{2}} + 1}$ et $g(0) = \frac{10}{10 k e^0 + 1} = 1$, soit $10 = 10k + 1$, soit $k = 0{,}9$. Donc $g(x) = \frac{10}{9 e^{\frac{-x}{2}} + 1}$.
3. La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont; $g'(x) = \frac{45 e^{\frac{-x}{2}}}{(9 e^{\frac{-x}{2}} + 1)^2} > 0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 10$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x}{2}} = 0$. Le nombre de foyers équipés d'un téléviseur à écran plat tend vers 10 millions.
5. L'année où le nombre de foyers équipés dépassera 5 millions vérifie l'inéquation $g(x) \geqslant 5$;



soit $10 \geqslant 5\,(9 e^{\frac{-x}{2}} + 1)$, soit $2 \geqslant 9 e^{\frac{-x}{2}} + 1$, soit $\frac{1}{9} \geqslant e^{\frac{-x}{2}}$, soit $\ln\left(\frac{1}{9}\right) \geqslant \frac{-x}{2}$, soit $\frac{x}{2} \geqslant \ln 9$, soit $x \geqslant 2\ln 9$;
comme $2\ln 9 \simeq 4{,}39$, le nombre de foyers équipés dépassera 5 millions dans l'année 2010.