CORRIGÉ DU BAC BLANC 2008 TERMINALES S

Exercice n°1 :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = xe^{-x}\left(-xe^{x}\right) = -x^2e^0 = -x^2$. Or $-x^2 \leq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) \leq 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$ donc $f'(x) + f(x) = e^{-x}(1-x) + xe^{-x} = e^{-x}$

c) Considérons la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - 1$. On a $g'(x) = f'(x) = e^{-x}(1-x)$. Sur $\mathbb{R}$, $g'(x)$ est du signe de 1-*x*.

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$g'(x)$	+ 0 −
$g(x)$	

Donc *g* admet un maximum en 1 qui est $g(1) = f(1) - 1 = 1e^{-1} - 1 < 0$. Donc pour tout *x* de $\mathbb{R}$, $g(x) \leq 0$ soit $f(x) \leq 1$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. On a une forme indéterminée mais d'après le cours $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

e) $f'(x) = \left(1-x\right)e^{-x}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. On a affaire à une forme indéterminée. Mais $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc par différence $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 2 :

1) **b)**La suite *u* est définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$. Cette fonction étant une fonction affine, elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc si *u* est convergente vers *l* , la fonction *f* est continue en *l* et d'après le théorème sur la composée d'une suite et d'une fonction alors $f(l) = l$ soit

$$\frac{1}{3}l + \frac{23}{27} = l \Leftrightarrow \frac{23}{27} = \frac{2}{3}l \Leftrightarrow l = \frac{23}{27} \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow l = \frac{23}{9\times2} \Leftrightarrow l = \frac{23}{18}.$$

c) on fait une démonstration par récurrence :

initialisation : pour *n* =0, $u_0 = 2$. On a bien $2 \geq \frac{23}{18}$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose la propriété vraie à un certain rang *n*, c'est-à-dire que l'on suppose que $u_n \geq \frac{23}{18}$ et on démontre qu'alors elle est vraie au rang *n*+1. En effet

$$u_n \geq \frac{23}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n \geq \frac{1}{3}\times\frac{23}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{1}{3}\times\frac{23}{18} + \frac{23}{27} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{23+23\times2}{3\times9\times2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{69}{3\times9\times2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{23}{18}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq \frac{23}{18}.$$

On en conclut que la propriété est vraie pour tout *n* entier naturel.

d) Quel que soit *n* entier naturel, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27}$. Or, on a vu que pour tout *n*,

$u_n \geq \frac{23}{18} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}u_n \leq -\frac{2}{3}\times\frac{23}{18} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27} \leq -\frac{23}{27} + \frac{23}{27} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$;On en conclut que la suite *u* est décroissante.

La suite u est donc décroissante et minorée par $\frac{23}{18}$ donc elle converge. On a vu question b) que si elle converge elle converge vers $\frac{23}{18}$ donc elle converge vers $\frac{23}{18}$.

2)a) $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...+\frac{1}{10^{n+1}}$ est la somme de $n+1-2+1=n$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{10^2}$ et de raison $\frac{1}{10}$. Cette somme est donc égale à

$$\frac{1}{10^2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right]=\frac{1}{10^2}\times\frac{10}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]=\frac{1}{90}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right].$$

b) $v_n=1,2777...77$ avec n décimales consécutives égales à 7 donc le dernier 7 est le (n+1)ème chiffre après la virgule et $v_n=1,2777...7+0,0000...07=v_{n-1}+7\times10^{-(n+1)}$.
Cette égalité est valable pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.
On l'écrit à tous les rangs :

$$v_0=1,2$$

$$v_1=v_0+7\times\frac{1}{10^2}$$

$$v_2=v_1+7\times\frac{1}{10^3}$$

$$v_n=v_{n-1}+7\times\frac{1}{10^{n+1}}$$

En ajoutant membre à membre ces égalités, on obtient $v_n=1,2+7\left[\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...+\frac{1}{10^{n+1}}\right]$. D'après la question a) , on obtient $v_n=1,2+7\times\frac{1}{90}\left[1-\frac{1}{10^n}\right]$.

La raison de la suite géométrique est telle que $-1<\frac{1}{10}<1$ donc $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ converge vers 0 et la suite v converge vers $1,2+\frac{7}{90}=\frac{108+7}{90}=\frac{115}{90}=\frac{23}{18}$

2) La suite u est décroissante, la suite v est évidemment croissante, elles convergent toutes les deux vers $\frac{23}{18}$. Reste à voir si la limite de la différence v_n-u_n est égale à 0.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ donc les deux suites sont adjacentes.

Exercice n°3 :

a) $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i}=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $|z_1| = |\sqrt{2}+i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on en déduit

$\arg(z_1) = \theta = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

$|z_2| = |2+2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de même $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit

$\arg(z_2) = \theta = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

On a donc $|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$ et $\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$

c) En identifiant les deux écritures du complexe Z, on obtient $\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

On en déduit $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}$

d) z_B et z_A ont même module donc on trace le cercle de centre O et de rayon OB. On trace le cercle trigonométrique de façon à tracer $\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. On en déduit le point A.

z_C a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{12}$. Donc, sur le cercle trigonométrique, on place ce point en traçant la bissectrice de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

e) $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$ donc

$Z^{2007} = e^{i\frac{\pi}{12}\times 2007} = e^{i\pi\left(\frac{2007}{12}\right)} = e^{i\pi\left(\frac{2016-9}{12}\right)} = e^{i\pi 168} \times e^{i\left(-\frac{9}{12}\right)\pi} = 1\times e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) =$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4 :

1) $(E_0)\, y' + y = 1 \Leftrightarrow y' = -y+1$ Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec a=-1 et b=1d'où $-\dfrac{b}{a} = 1$ donc les solutions sont les fonctions g définies par $g(x) = ke^{-x}+1$, où k est un réel quelconque.

2) f est solution de (E) $\Leftrightarrow$

$f'(x) + (1+\tan x)f(x) = \cos x \Leftrightarrow g'(x)\cos x - g(x)\sin x + (1+\tan x)g(x)\cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow g'(x)\cos x - g(x)\sin x + g(x)\cos x + g(x)\sin x = \cos x \Leftrightarrow g'(x)\cos x + g(x)\cos x = \cos x$

Or, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ $\cos x \neq 0$ donc l'équation précédente est équivalente à $g'(x) + g(x) = 1 \Leftrightarrow g$ est solution de (E_0).

3) Les solutions de (E) sont donc les fonctions f de la forme $f(x) = \left(ke^{-x}+1\right)\cos x$.

On cherche k tel que $f(0) = 0 \Leftrightarrow (k+1)1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$. La solution cherchée est donc la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \left(-e^{-x}+1\right)\cos x$