Lycée F. MISTRAL AVIGNON

BAC BLANC 2008
Epreuve de MATHEMATIQUES
Série S

CALCULATRICE AUTORISEE

DUREE : 4 heures

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

EXERCICE N°1 (commun à tous les élèves) (5 *points*)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

.

Démontrer les cinq affirmations suivantes :

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) \leq 0$.
2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = e^{-x}$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

EXERCICE N°2 (commun à tous les élèves) (6 points)

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a) On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en *annexe,* la droite d'équation : $y = \dfrac{1}{3} x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0). Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b) Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est : $l = \dfrac{23}{18}$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

d) Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ c'est-à-dire que $\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{10^3}+...+\dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{90}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$

b) La suite v est définie par : $v_n = 1{,}2777...7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1} *et* en utilisant le **a)** démontrer que la suite v converge vers un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers) que l'on précisera.

3. La suite u définie au **1.** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE N°3 (commun à tous les élèves) (5 points)

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique .
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis donner un procédé de construction des points A et C en utilisant la règle et le compas. Construire ces points en laissant apparents les traits de construction.
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

EXERCICE N°4 (pour les élèves ne suivant pas la spécialité) (4 points)

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

(E) $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$.

(E_0) $y' + y = 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que : $f(x) = g(x) \cos x$. Démontrer que la fonction f est solution de *(E)* si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

EXERCICE N°4 (pour les élèves suivant la spécialité) (4 points)

1. **a)** Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$ et que $6^{40} \equiv 1 \pmod 5$.
   d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question, x et y désignent des entiers relatifs.
   a) Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
   b) Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
   c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
   d) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17\,x_0 \equiv 1 \pmod{40}$.
3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et si $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$ alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$.

ANNEXE