Exercice 1 :
Étudier la convexité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition ;
préciser si la courbe représentative de la fonction admet des points d'inflexion :

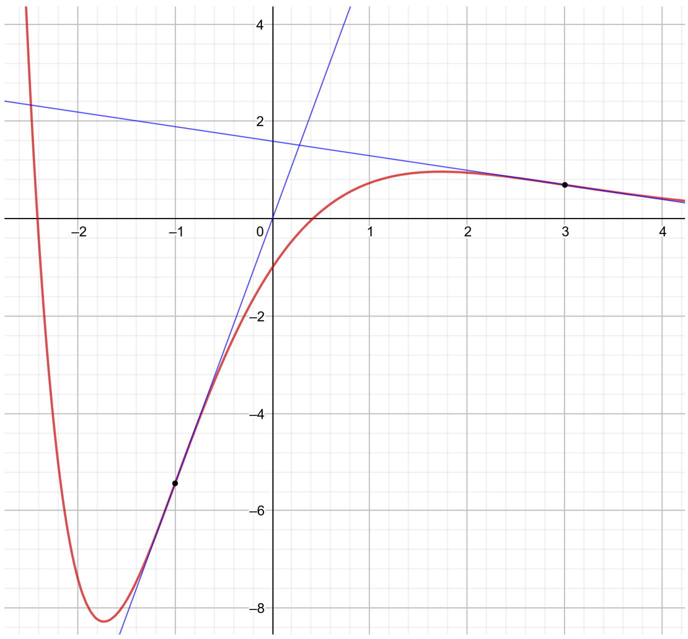
a) $f(x) = e^{3x-1}$; b) $f(x) = (x-1)e^{-x}$; c) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$; d) $f(x) = \ln(2x+4)$;

e) $f(x) = x - \ln(x+1)$; f) $f(x) = x^2 + 2 + \ln(x)$; g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;

h) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$; i) $f(x) = (\ln(x))^2$.

Exercice 2 :
On note f la fonction logarithme népérien et Cf sa courbe représentative dans un repère.
1. Étudier la convexité de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse 1.
3. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

Exercice 3 :
Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère.
1. Rappeler la convexité de la fonction g.
2. Déterminer $g'(x)$ pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, puis le nombre dérivé $g'(1)$.
3. En déduire une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.
4. Utiliser les réponses aux questions précédentes pour démontrer que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, on a $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.



Exercice 5 :
La courbe ci-contre représente la fonction f ;
les tangentes aux point d'abscisses – 1 et 3 traverse la courbe.
1. En déduire la convexité de la fonction f.
2. Donner le tableau de variations de la fonction dérivée f'.

Exercice 6 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
1. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a + e^b}{2}$.
2. En utilisant la convexité de la fonction logarithme népérien, montrer que $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.
3. a) Montrer que la fonction f définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1\ ;\ +\infty[$.

b) En déduire que pour tous réels a, b strictement supérieur à 1, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Exercice 7 :
Soient f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante.
Démontrer que la composée gof est convexe.